חשבון אינפיניטסימאלי 3 – תרגיל בית מס' 6

שאלה 1

א. חשבו פולינום טיילור מסדר n סביב $(0,0)$, עם שארית לגרנז' המתאימה, עבור הפונקציות הבאות:

$$(1)\ \ f(x,y)=\sin(x+y) \qquad (2)\ \ f(x,y)=\frac{1}{x+y+1}$$

ב. תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד, גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בקטע פתוח I, המכיל את הנקודה $t=0$.
הוכיחו כי פולינום מקלורן (כלומר פולינום טיילור סביב הראשית) מסדר n של הפונקציה $f(x,y)=g(x+y)$ הוא: $P_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x+y)^k$

וקיים $0<{}^{\text{¯}}<1$, כך שהשארית המתאימה היא:

$$R_n(x,y)=\frac{g^{(n+1)}\left({}^{\text{¯}}x+{}^{\text{¯}}y\right)}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}$$

ג. היעזרו בתוצאה של סעיף ב' כדי לפתור מחדש את סעיף א'.

שאלה 2 (אין קשר בין סעיפי השאלה)

א. חשבו פולינום טיילור מסדר 2 סביב הנקודה $(1,0)$, עם שארית לגרנז' המתאימה, של הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

ב. רשמו פולינום מקלורן מסדר 5 לפונקציה $f(x,y)=e^{x^2}\sin(2y)$.

ג. בטאו את הפולינום $p(x,y)=x^3+xy+y^2$ באמצעות חזקות של $x-a,\ y-b$, כאשר a,b פרמטרים ממשיים. היעזרו בפולינום טיילור.

<u>שאלה 3</u>

חקרו נקודות קיצון מקומיות בכל תחום ההגדרה עבור הפונקציות הבאות (מצאו את כל הנקודות החשודות כקיצון ולאחר מכן סווגו אותן עפ"י: מינימום מקומי, מקסימום מקומי ואוכף):

א. $f\left(x,y\right)=x^3+y^3+3x^2-6y^2$

ב. $f\left(x,y\right)=\left(x-1\right)^2-2y^2$

ג. $f\left(x,y\right)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

ד. $f\left(x,y\right)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ ,\ a,b\neq 0$

ה. $f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

<u>שאלה 4</u> (אין קשר בין סעיפי השאלה)

א. תהי $f\left(x,y\right)=3xe^y-x^3-e^{3y}$. הראו כי ל- f קיצון מקומי יחיד בכל המישור, וקבעו האם זהו מינימום או מקסימום מקומי. האם קיצון זה הוא מוחלט? נמקו.
האם קיימת דוגמא של פונקציה של משתנה אחד בעלת תכונה זהה? אם קיימת, רשמו דוגמא כזו ונמקו, ואם לאו – נמקו מדוע.

ב. חקרו נקודות קיצון מקומיות <u>ומוחלטות</u> בכל המישור עבור $f\left(x,y\right)=x^2+\frac{1}{2}y^4-2xy$.