תרגיל 4

להגשה עד 15.5.2014, ט"ו אייר. כל אחד בקבוצת התירגול שלו

שאלה 1

קבעו אם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים

.1

$$\int_1^5 \frac{1}{\ln^2(x)}dx$$

.2

$$\int\limits_1^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$$

.3

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$$

.4

$$\int\limits_1^\infty e^{-\ln^2 x}\mathrm{d}x$$

.5

$$\int\limits_0^\infty x^2\sin(x^4)\mathrm{d}x$$

.6

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x$$

.7

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}}\mathrm{d}x$$

שאלה 2

חשבו לאילו ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ האינטגרל מתכנס ולאילו ערכים הוא מתבדר.

.1

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

.2

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

.3

$$\int_1^\infty \ln^\alpha x\mathrm{d}x$$

שאלה 3

1. הוכח כי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}dx$ מתכנס בתנאי (כלומר $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}dx < \infty$ אבל $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}\right|dx$ מתבדר

2. נתונה f חיובית ורציפה ונתון כי $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \infty$ הוכיחו כי

$$\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \infty$$

פתרון

שאלה 1

.1

$$\int_1^5 \frac{1}{\ln^2(x)}dx$$

נשווה את $f(x) = \frac{1}{\ln^2(x)}$ עם $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2}{\ln^2(x)} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)}{\ln(x)} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to1^+}\frac{2x-1}{\frac{1}{x}} = 1$$

ולכן האינטגראל שלנו ו $\int_1^5 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד. נבצע החלפת משתנים $t = x-1$ ונקבל את האינטגראל $\int_0^4 \frac{1}{t^2}dt$ שמתבדר!

2. מתקיים

$$\int\limits_1^\infty \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x - \int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

בנוסף, $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ מתכנס ע"י השוואה לאינטגראל $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ ‏) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(1+x^2)} =$ (1

וגם $\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$ מתכנס ע"י השוואה לאינטגראל $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ ‏) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)\arctan(x)}{1+x^2} =$ ($\frac{\pi}{2}$ שהוא מתכנס עם השוואה לאינטגראל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

.3

$$\int_0^\infty xe^{-\sqrt{x}}dx$$

נציב $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ונקבל

$$\int_0^\infty t^2e^{-t}\cdot 2tdt$$

כעת

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3e^{-t}}{e^{-t/2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3}{e^{t/2}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{t\to\infty}\frac{12t^2}{e^{t/2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{48t}{e^{t/2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{96}{e^{t/2}}=0$$

ולכן אם $\int_0^\infty e^{-t/2}dt$ מתכנס גם האינטגראל שלנו (מבחן השוואה). ואכן

$$\int_0^\infty e^{-t/2}dt=-2\cdot e^{-t/2}\Big|_0^\infty=2$$

מתכנס

4. היות ו $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{2\ln(x)}=\infty$ החל מנקודה כלשהיא $2\ln x\le\ln^2 x$ אז

$$e^{-\ln x^2}\le e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

היות ו $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אז גם האינטגרל שלנו מתכנס, לפי מבחן השוואה.

5. עבור $\int\limits_0^\infty x\sin(x^4)\mathrm{d}x$ ב־0 אין בעיה ולכן מספיק לבדוק ש $\int\limits_2^\infty x\sin(x^4)\mathrm{d}x$ מתכנס .

נציב $t=x^4$ (ואז $\mathrm{d}t=4x^3\mathrm{d}x$) ונקבל

$$\int\limits_2^\infty x\sin x^4\mathrm{d}x=\int\limits_2^\infty\frac{1}{x^2}\sin x^4\cdot x^3dx=\int\limits_{16}^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sin t\cdot\frac{dt}{4}$$

אינטגראל זה מתכנס לפי דריכלה ($G(x)=\int_{16}^x\sin tdt$ חסום ו $\frac{1}{\sqrt{t}}$ מונוטונית, גזירה ברצפיות, יורדת ל־0)

6. מתקיים

$$\int\limits_0^\infty\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}dx+\int\limits_1^\infty\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}dx$$

ולכן מספיק לבדוק עבור כל אחד מהאינטגראלים בנפרד:
את $\int_0^1\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}dx$ נשווה עם $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}dx$ כיוון ש

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}}{\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan}{x}=1$$

הם מתכנסים או מתבדרים ביחד.

$$\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}dx=\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2(x+\frac{1}{x})}}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}dx$$

האיטגראל הזה מתכנס לפי השוואה עם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
את האינטגרל הימני $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}dx$ אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי ל $\frac{1}{x^{1.5}}$ולקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\pi}{2}$$

היות ו $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס.

7. מתקיים

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x$$

נציב $t=-\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x=-\int\limits_{-\ln\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{-\ln\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

וזה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

שאלה 2

חשבו לאילו ערכי $\alpha\in\mathbb{R}$ האינטגרל מתכנס ולאילו ערכים הוא מתבדר.

1. ראינו בתירגול כי $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר ולכן
אם $\alpha\le 1$ נשים לב שמתקיים

$$\frac{\sin^2 x}{x}\le\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$$

היות ו $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר ברור שגם האינטגרל שלנו מתבדר לפי מבחן השוואה.
אם $\alpha>1$ אז היות ומתקיים

$$\int\limits_1^\infty\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}=\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}-\int\limits_1^\infty\frac{\cos 2x}{x^\alpha}$$

ושהאינטגרל הימני מתכנס (לפי דיריכלה) וגם האינטגרל השמאלי מתכנס - לכן האינטגרל הכולל גם מתכנס.

2. נשווה את $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ עם $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ קל לראות ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 3$ אז גם האינטגרל שלנו מתכנס במצבים אלה.

3. עבור $\alpha \geq 0$ האינטגראל $\int_1^\infty \ln^\alpha x\mathrm{d}x$ מתבדר
עבור $\alpha < 0$ נשווה תחילה עם $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\ln^\alpha(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/2}}{\ln^{-\alpha}(x)} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{-\alpha\ln^{-\alpha-1}(x)\cdot 1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/2\cdot x^{1/2}}{-\alpha\ln^{-\alpha-1}(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/2)^2\cdot x^{1/2}}{-\alpha(-\alpha-1)\ln^{-\alpha-2}(x)} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{(1/2)^n\cdot x^{1/2}}{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-(n-1))\ln^{-\alpha-n}(x)}\end{aligned}$$

כאשר n הוא הערך השלם הכי קטן המקיים $-\alpha-n \leq 0$ נקבל כי $\lim_{x\to\infty} \frac{(1/2)^n\cdot x^{1/2}}{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-(n-1))\ln^{-\alpha-n}(x)} = \infty$
מכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתבדר גם $\int_1^\infty \ln^\alpha x\mathrm{d}x$ יתבדר.

שאלה 3

1. הוכח כי האינטגראל $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}dx$ מתכנס בתנאי (כלומר $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}dx < \infty$ אבל $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}\right|dx$ מתבדר
האינאגראל מתכנס: (נשתמש ברעיון דומה לדריכלה)
נגדיר -

(א) $g(t) = \sin(t)$
(ב) $G(x) = \int_1^x g(t)dt$ חסומה ע"י 2
(ג) $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ וגם $f'(x) = -\frac{1-\frac{1}{2}\sin(x)}{(x+\frac{1}{2}\cos(x))^2} \leq 0$

כעת, לפי אינטגראציה בחלקים:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}dx = \int_1^\infty f(x)\cdot g(x)dx = G(x)\cdot f(x)\Big|_1^\infty - \int_1^\infty f'(x)G(x)dx = 0 - G(1)f(1) + \int_1^\infty -f'(x)G(x$$

מספיק להראות כי $\int_1^\infty -f'(x)G(x)dx$ מתכנס. נראה שהוא מתכנס בהחלט

$$\int_1^\infty |-f'(x)G(x)|dx \leq \int_1^\infty |-f'(x)|2dx = 2\int_1^\infty -f'(x)dx = -2f(x)\Big|_1^\infty = 2f(1)$$

האינטגראל לא מתכנס בהחלט: כיוון ש

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}}\right|dx \le \int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}\cos(x)}\right|dx$$

מספיק להראות כי $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}}\right|dx$ מתבדר.

כיוון ש $\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}}\right|}{\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|}=1$ אזי $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}}\right|dx$ ו $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד וראינו בתירגול כי $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x+\frac{1}{2}}\right|dx$ מתבדר

2. נתונה f חיובית ורציפה ונתון כי $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x=\infty$ הוכיחו כי

$$\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\infty$$

נציב $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = t$ ואז $\mathrm{d}t=f(x)\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\int\limits_a^\infty \frac{1}{t}\mathrm{d}t=\infty$$

כאשר $\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a$ נשים לב שהשתמשנו בנתון $\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=\infty$ כדי לקבוע את הגבול העליון של האינטגרל אחרי הצבה.