תרגול 8 - יחסי שקילות ועוד

הגדרה תהי A קבוצה, יחס R על A נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

לכל $a \in A$ נגדיר את מחלקת השקילות של a להיות $[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$

כל איבר $b \in [a]_R$ נקרא נציג של מחלקת השקילות

דוגמא

נגדיר יחס על $\mathbb{Z}$: $(m,n) \in R$ אם $3|(m-n)$ (קרי: 3 מחלק את $m-n$)

[*הבהרה:* $p|m$ פירושו ש $m = pk$ עבור איזשהו $k \in \mathbb{Z}$]

נוכיח שהוא יח"ש:

- רפלקסיבי: $\forall n \in \mathbb{Z} \quad 3|0 = n-n \quad \Rightarrow \quad (n,n) \in R$
- סימטרי: נניח $(m,n) \in R$ כלומר $3|(m-n) \Leftarrow \quad 3|n-m = -(m-n)$
$\Leftarrow (n,m) \in R$
- טרנזיטיבי: נניח $(m,n),(n,k) \in R$ כלומר $3|(n-k)$, $3|(m-n)$
כידוע אם מס' מסוים מחלק 2 מספרים אז הוא מחלק את הסכום שלהם ולכן
$3|(m-n)+(n-k) = m-k$ כלומר קיבלנו $(m,k) \in R$

עכשיו נחשב את מחלקות השקילות:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} \mid (0,n) \in R\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|n\} = \{3k | k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} \mid (1,n) \in R\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|n-1\} = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} \mid (2,n) \in R\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|n-2\} = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

שים לב: $[0] = [3] = [-3] = \cdots$ וכדו'

טענות:

1. לכל $b \in [a]_R$ מתקיים $[a]_R = [b]_R$
2. לכל $b \notin [a]_R$ מתקיים $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
כלומר שמחלקות שקילות הן או זרות או שוות זו לזו.
3. אם ניקח נציג יחיד לכל מחלקת שקילות : $a_1, a_2, \dots, a_k$ אזי
$\cup_{i=1}^{k} [a_i]_R = [a_1]_R \cup [a_2]_R \cup \dots \cup [a_k]_R = A$

כלומר שאיחוד כל מח' השקילות הוא כל הקבוצה A.

כך למשל: $[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{Z}$

הגדרה תהי A קבוצה. אוסף של תתי קבוצות של A: $A_1, \dots, A_m$ $(A_i \subseteq A)$ נקראת **חלוקה** של A אם כל התתי קבוצות זרות בזוגות $(A_i \cap A_{j=\emptyset})$ ואיחוד כולן הוא כל A $(A_1 \cup \dots \cup A_m = A)$.

לפי הטענות הנ"ל כל יח"ש משרה חלוקה: אוסף מחלקות השקילות הוא חלוקה.

גם הכיוון ההפוך נכון: כל חלוקה משרה יחס שקילות.

ועכשיו למשהו אחר לגמרי...

תהיינה A, B קבוצות. $|A| = n, \quad |B| = m$

1. כמה פונקציות יש מA לB ?

תשובה: כדי להגדיר פונקציה צריך לעבור על כל איברי A ולבחור להם תמונה מB . אין הגבלה על התמונות ולכן לכל איבר של A יש $|B| = m$ אפשרויות. ולכן סה"כ $|B|^{|A|} = m^n$.

2. כמה פונקציות **חח"ע** יש מA לB ?

תשובה: ראשית נעיר שאם $m < n$ אז יש 0 פונקציות חח"ע. ולכן נניח $n \leq m$

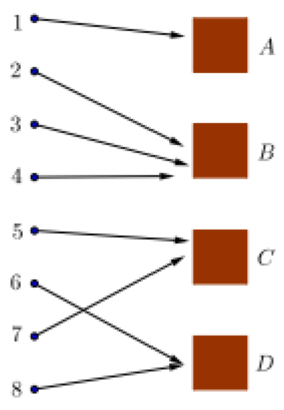
שוב נעבור על איברי A ונבחר להם תמונה. לאיבר הראשון יש m אפשרויות, לשני יש $m-1$ אפשרויות,...., לאיבר ה n י יש $m-n+1$ אפשרויות. סה"כ: $m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$

3. כמה פונקציות **על** יש מA לB ? ראשית נעיר שאם $m > n$ יש 0 פונק' על. ולכן נניח $n \geq m$

נדגים בעזרת התרגיל הבא...

תרגיל בבית של ד"ר בלק יש 4 חדרים: A, B, C, D והוזמנו 8 אורחים.

בכמה דרכים ניתן לשים את האורחים בחדרים כך שאין חדר ריק?



(זה כמו לשאול כמה פונק' על יש מקב' האורחים לקב' החדרים)

פתרון בעזרת הכלה והדחה

כמה דרכים יש לחלק את האורחים באופן כללי? (כמו כמה פונק' יש) לכל אורח 4 אפשרויות: 4^8

כמה סידורים יש כך שיש חדר אחד ריק? $\binom{4}{1}3^8$

כמה סידורים יש כך שיש 2 חדרים ריקים? $\binom{4}{2}2^8$

כמה סידורים יש כך שיש 3 חדרים ריקים? $\binom{4}{3}1^8$

מס' הסידורים ה"לא טובים" הוא $\binom{4}{1}3^8 - \binom{4}{2}2^8 + \binom{4}{3}1^8$

ולכן מס' הסידורים הטובים הוא $4^8 - \binom{4}{1}3^8 + \binom{4}{2}2^8 - \binom{4}{3}1^8$

באופן כללי מס' הפונקציות העל מA לB הוא $\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$

4. כמה חלוקות של A עם m קבוצות יש? (שזה כמו: כמה יחסי שקילות עם m מחלקות שקילות יש?)

תשובה: זה כמו כמה פונק' על יש (תחשבו על זה כך: כל האיברים שנשלח לאיבר הראשון של B יהיו קבוצה אחת, כל האיברים שנשלח לאיבר השני של B יהיו קבוצה שנייה, וכו'. העובדה שהפונקציה על אומרת שבשיטה זו לא נקבל קב' ריקות) **אבל** הסדר של הקבוצות לא משנה (בעוד שעבור פונקציות זה מאוד משנה לאן שולחים את האיברים). לכן צריך לחלק בסידורים הפנימיים של הקבוצות (כיוון שאין קבוצות ריקות זה יוצא $m!$) לכן נקבל $\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$

5. כמה חלוקות של A יש? $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$