החבורה הסימטרית(המשך)

בשבוע שעבר הוכחנו משפט: $A_n \trianglelefteq S_n$(לכל $1 \le n$)

בשעור הזה נוכיח משפט: עבור $5 \le n$, A_n תת"נ לא טריוויאלית יחידה של S_n.

ראשית - הכנות(חשובות גם מצד עצמן):

א. קבוצת יוצרים לA_n

תזכורת: קבוצת כל החילופים יוצרת את S_n.

מסקנה: $A_n = m\left\{\pi \in S_n : \text{sign}\left(\pi\right) = 1\right\}$ היא בדיוק קבוצת כל התמורות בהן מכפלות מאורך זוגי של חילופים. ולכן

$$\left\{\left(i,j\right)\left(k,l\right): \begin{array}{c} i,j,k,l \in \{1,...n\} \\ different\,letters \end{array}\right\} \coprod \left\{\left(i,j\right)\left(j,l\right): \begin{array}{c} i,j,l,l \in \{1,...n\} \\ different\,letters \end{array}\right\}$$

יוצרת את A_n.

עובדה: לכל i,j,k,l אותיות שונות $\left(i,j\right)\left(k,l\right) = \left(j,k,i\right)\left(j,k,l\right)$. כלומר כל שני כפל מחזורים מאורך 2 אפשר לייצג בתור כפל שני מחזורים מאורך 3.

מסקנה: קבוצת כל המחזורים מאורך 3 יוצרת את A_n

1. הצמדה

הגדרה: $g,h \in G$ נקראים איברים צמודים אם קיים $x \in G$ כך ש $xgx^{-1} = h$

תרגיל: זה יחס שקילות.

תרגיל

שתי תמורות $\pi,\sigma \in S_n$ צמודות אמ"ם יש להן אותו מבנה מחזורים.

עובדה

אם $x \trianglelefteq G$ אז לכל $g \in N$, כל הצמודים לg ג"כ בN.

הוכחה

לכל $x \in G$, $xgx^{-1} \in xNx^{-1} = N$

משפט

עבור $5 \le n$, A_n תת"נ לא טריוויאלית יחידה של S_n

הוכחה

תהא $N \trianglelefteq S_n$. ניתן להניח $N \neq \{e\}$(כי אחרת היא טריוויאלית).

מ"ל $A_n \subseteq N$. מדוע? כי אם $A_n \subseteq N$ אז $A_n \leq N$. האינדקס $[N : A_n] = \dfrac{|N|}{|A_n|}$ הוא מספר שלם (לגרנז').

אם $\dfrac{|N|}{|A_n|} = 1$ אז $[N : A_n] = $ $|N| = |A_n|$ והנחנו $A_n \subseteq N$ ובהנחה ש$A_n \subseteq N$ נקבל $N = A_n$.

אם $\dfrac{|N|}{|A_n|} = 2$ אז $[N : A_n] = $ $|N| = 2|A_n| = |S_n|$, הנחנו $N \subseteq S_n$, מכאן $N = S_n$

הערה: כמובן, לא ייתכן $[N : A_n] > 2$(מדוע? כי אז נקבל $|N| \geq |S_n|$)

יתר על כן, מספיק להוכיח שN מכילה מחזור אחד מאורך 3, כי אם N מכילה מחזור אחד מאורך 3 אז לפי עובדה לעיל, היא מכילה את כל הצמודים לו(היות וN תח"נ), ולכן היא מכילה את כל המחזורים מאורך 3. קבוצת כל המחזורים מאורך 3 יוצרת את A_n(הוכחנו) ולכן $A_n \subseteq N$.

כעת, תהא $\{e\} \neq N \trianglelefteq S_n$. $N \neq \{e\}$, לכן קיים איבר $e \neq \pi \in N$. יהא $\pi =$ $\gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_t$ פירוק של π כמכפלה של מחזורים זרים. בה"כ, γ_1 מחזור מאורך מקסימלי בין גורמי המכפלה. יהא $\gamma_1 = (i_1, i_2, ...i_m)$.

מקרה א $2 < m$

אז $\gamma_1 = (i_1, i_2, ...i_m)$. נסמן $\hat{\gamma_1} := (i_2, i_1, i_3, ...i_m)$, $\hat{\pi} := \hat{\gamma}_1\gamma_2...\gamma_t$. ל$\pi$ ו$\hat{\pi}$ אותו מבנה מחזורים, לכן הם צמודים, לכן, מכיוון ש$\pi \in N$ אז גם $\hat{\pi} \in N$. כלומר $\pi, \hat{\pi} \in N$, לכן גם $\pi^{-1} \in N$ וגם $\hat{\pi}\pi^{-1} \in N$. נחשב:

$$\hat{\pi}\pi^{-1} = \hat{\gamma_1}\gamma_2\gamma_3...\gamma_t\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_t\right)^{-1}$$

$$= \hat{\gamma_1}\gamma_2\gamma_3...\gamma_t\gamma_t^{-1}...\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$$

$$= \hat{\gamma_1}\gamma_1^{-1} = (i_2, i_1, i_3, ...i_m)\left(i_m, i_{m-1}, i_{m-2}, ...i_3, i_2, i_1\right) = ...$$

נבדוק לאן כל איבר הולך: i_1 הולך לi_m הולך לi_2. i_2 הולך לi_1 הולך לi_3. i_3 הולך לi_2 הולך לi_1. i_4 הולך לi_3 הולך לi_4 - וכל לכל האיברים $i_4, ...i_m$.
לכן:

$$... = (i_1, i_2, i_3)$$

סיימנו מקרה א'.

מקרה ב נכזכור: $e \neq \pi = \gamma_1...\gamma_t \in N$(מכפלה של מחזורים זרים). ניתן להניח כולם מאורך≤ 2.
תנאי מקרה ב': כל המחזורים מאורך 2.
אם $t = 1$ אז $\pi = \gamma_1$ חילוף. $N \trianglelefteq S_n$ מכילה חילוף, לכן מכילה את כל החילופים(מדוע? כי הם צמודים), לכן מכילה את ת"ח הנוצרת ע"י החילופים,

כלומר את S_n. ז.א. $N \trianglelefteq S_n$. מסקנה: $N = S_n$.

לכן, נניח $t \geq 2$ ונסמן $\begin{matrix}\gamma_1 = (i_1, i_2)\\ \gamma_2 = (i_3, i_4)\end{matrix}$. $(\pi = \gamma_1\gamma_2...\gamma_t)$. נסמן: $\begin{matrix}\hat{\gamma}_1 = (i_1, i_3)\\ \hat{\gamma}_2 = (i_2, i_4)\end{matrix}$, $\hat{\pi} = \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2...\gamma_t$.

ל-π ו-$\hat{\pi}$ אותו מבנה מחזורים, לכן הם צמודים. $\pi \in N$ ו-$N \trianglelefteq S_n$ לכן גם $\hat{\pi} \in N$ ולכן גם $\hat{\pi}\pi^{-1} \in N$. נחשב:

$$\hat{\pi}\pi^{-1} = \left(\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\gamma_3...\gamma_t\right)\left(\gamma_t^{-1}...\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\right)$$

$$= \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1} = (i_1, i_3)(i_2, i_4)(i_3, i_4)(i_1, i_2)$$

$$= (i_1, i_4)(i_2, i_3)$$

לכן N מכילה את כל התמורות שהן מכפלות של שני חילופים זרים(לא קיבלנו מחזור מאורך 3)

<u>בפרט עבור $n \geq 5$:</u>

n מכילה את $\begin{matrix}\sigma_1 = (1,2)(4,5) \in N\\ \sigma_2 = (4,5)(2,3) \in N\end{matrix}$ ולכן

$$N \ni \sigma_1\sigma_2 = (1,2)(4,5)(4,5)(2,3) = (1,2,3)$$

כלומר N מכילה מחזור מאורך 3. סיימנו. ■

חבורות פשוטות

הגדרה

חבורה G היא פשוטה אם אין לה תח"נ לא טריוויאלית. ז.א. אם $N \trianglelefteq G \Leftarrow N = G$ או $N = \{e\}$.

דוגמה

חבורה מסדר ראשוני p, G. לפי משפט לגרנז' $N \leq G \Leftarrow p = |G| \mid |N|$. p ראשוני, לכן $|N| \in \{1, p\}$. אם $|N| = 1$ אז $N = \{e\}$. אם $|N| = p$ אז $N = G$.

משפט

עבור $n \geq 5$, A_n חבורה פשוטה.

הוכחה

דומה להוכחת המשפט הקודם ותושמט.

הערה

חיפוש אחרי חבורות סופיות פשוטות ומיונם, פרוייקט ענק של שישים שנים אחרונות.

קבוצות יוצרים של S_n (השלמה)

תזכורת: נסמן $T_n : \{(i,j) : 1 \leq i < j <\leq n\}$ קבוצת כל החילופים בS_n.

הראינו: $S_n = \langle T_n \rangle$.

הערה: $|T_n| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

תרגיל: כל תמורה $\pi \in S_n$ ניתן לכתוב כמכפלה של לכל היותר $n-1$ תמורות.

עובדה

הקבוצה $\{(i,n) : 1 \leq i < n\}$ יוצרת את S_n.

הוכחה

לכל חילוף (i,j), $(i,j) = (i,n)(j,n)(i,n)$.
לכן, בצירוף התרגיל, כל תמורה ניתנת לכתיבה כמכפלה של לכל היותר $3(n-1)$ חילופים מהקבוצה הנ"ל.

עוד קבוצה חשובה ביותר

קבוצת יוצרי קוקסטר: $\{(i,i+1) : 1 \leq i < n\}$

עובדה

קבוצת יוצרי קוקסטר יוצרת את S_n

הוכחה

לכל חילוף (i,j):

$$(i,j) = (i,i+1)(i+1,i+2)(i+2,i+3)\ldots(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i_2,i_1)$$

משפט

לכל $\pi \in S_n$, π ניתן לכתיבה כמכפלה של $\mathrm{inv}(\pi)$ יוצרי קוקסטר (ולא פחות)

הוכחה

לא תנתן

תרגיל

מצא קבוצה $|A| \subseteq S_n$, $|A| = 2$, שיוצרת את S_n.

רמז

$\tau = (1,2)$, $\gamma = (1,2,...n)$. הוכח: $S_n = \langle \gamma, \tau \rangle$\לוזפ)חד\עיחטפ(