תרגיל בית 1 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1 (רענון הגדרות). נבדוק אלו תכונות נשמרות תחת תת־חוגים. יהי R חוג בלי יחידה, ויהי $S \subseteq R$ תת־חוג בלי יחידה. הוכיחו או הפריכו:

א. אם R עם יחידה, האם S עם יחידה? ולהפך?

ב. אם R חילופי, האם S חילופי? ולהפך?

ג. אם R תחום, האם S תחום? ולהפך?

ד. אם איבר x הפיך ב-R, האם הוא הפיך ב-S? ולהפך?

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו האם האובייקטים הבאים הם חוגים. במקרה שהם כן, האם הם תחומים?

א. $R = \left\{ \frac{m}{2n+1} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.

ב. $R = \left\{ \frac{2n+1}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.

ג. $R = (\mathrm{End}(G), +, \circ)$ כאשר $(G, +, 0)$ היא חבורה אבלית, $\mathrm{End}(G)$ הוא אוסף האנדומורפיזמים של G (הומומורפיזמים מ-G לעצמה), הפעולה $+$ ב-R היא חיבור פונקציות המושרה מהפעולה של G והפעולה $\circ$ היא הרכבה. רמז: R הוא חוג.

ד. $R = (C[0,1], +, \circ)$ כאשר $C[0,1]$ הוא אוסף הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[0,1]$, הפעולה $+$ היא חיבור פונקציות והפעולה $\circ$ היא הרכבה.

ה. $R = (C[0,1], +, \cdot)$ כאשר הפעולה $\cdot$ היא כפל פונקציות, כלומר $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

שאלה 3. הוכיחו שהאקסיומה של חילופיות החיבור נובעת משאר האקסיומות האחרות של חוג. כלומר, אם $(R, +, \cdot)$ מקיים ש-$(R, +, 0)$ חבורה, $(R, \cdot, 1)$ מונואיד ומתקיים חוק הפילוג משני הצדדים, אז בהכרח $x + y = y + x$ לכל $x, y \in R$. (רמז: $(1+x)(1+y)$).

שאלה 4. יהיו R, S חוגים בלי יחידה. נגדיר את המכפלה הישרה $R \times S$ עם הפעולות רכיב-רכיב.

א. הוכיחו כי $R \times S$ חוג בלי יחידה, ושאם R, S הם חוגים (עם יחידה), אז גם $R \times S$.

ב. הגדירו מבנה של חוג על המכפלה הישרה $\prod_{i \in I} R_i$ למשפחה $\{R_i\}_{i \in I}$ של חוגים בלי יחידה, והוכיחו:

(i) אם R_i חילופי לכל $i \in I$, אז גם $\prod_{i \in I} R_i$ חילופי.

(ii) אם כל R_i הוא חוג עם יחידה, אז גם $\prod_{i \in I} R_i$ הוא חוג עם יחידה.

ג. נגדיר את **הסכום הישר** $\bigoplus_{i\in I} R_i$ של משפחת חוגים $\{R_i\}_{i\in I}$ להיות אוסף האיברים ב-$\prod_{i\in I} R_i$ שיש להם תומך סופי (כלומר רק מספר סופי של קואורדינטות שונות מ-0). (במקרה שבו קבוצת האינדקסים I סופית, ההגדרה מתלכדת עם זו של המכפלה הישרה).

(i) הוכיחו כי $\bigoplus_{i\in I} R_i$ הוא תת-חוג בלי יחידה של $\prod_{i\in I} R_i$.

(ii) מתי $\bigoplus_{i\in I} R_i$ הוא חוג עם יחידה?

שאלה 5. יהי R חוג חילופי, ויהיו $x, y \in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי (רמז: אנדומורפיזמים).

שאלה 6. יהי R תחום. הוכיחו $(R[x])^\times = R^\times$. כלומר לא מקבלים איברים הפיכים "חדשים" בחוג הפולינומים.

שאלה 7. יהי R חוג בלי יחידה.

א. נאמר כי R בוליאני אם לכל איבר $x \in R$ מתקיים $x^2 = x$. הוכיחו שאם R בוליאני, אז הוא חילופי.

ב. רשות: הוכיחו שאם לכל $x \in R$ מתקיים $x^3 = x$, אז R הוא חילופי. הדרכה:

(i) הראו כי לכל $x, y \in R$, אם $xy = 0$, אז $yx = 0$.

(ii) הראו כי אם $x \in R$ מקיים $x^2 = x$, אז $x \in Z(R)$.

(iii) הסיקו כי לכל $x \in R$, $x^2, x + x^2 \in Z(R)$, ומכאן הסיקו את הדרוש.

ג. הערה (ג'ייקובסון, 1945): אם לכל $x \in R$ קיים מספר שלם $n(x) > 1$ כך ש-$x^{n(x)} = x$, אז R הוא חילופי.

בהצלחה!