הערה: מספר התמורות הזוגיות בS_n הוא $\frac{n!}{2}$

הוכחה: ידוע שסימן הוא כפלי. (תוכיחו בהרצאה, אולי הוכחתם בלינארית 1. יש לארז סרטון בלינארית 1)

לכן לכל תמורה σ מסימן זוגי, $(1,2)\sigma$ הוא מסימן אי זוגי.

וכן להפך.

זאת התאמה חח"ע ועל בין התמורות הזוגיות לאי זוגיות, כי זאת פונקציה הפיכה.

$$f : A_n \to S_n \setminus A_n$$

$$g(\sigma) = (1,2)\sigma$$

$$g : S_n \setminus A_n \to A_n$$

$$g(\sigma) = (1,2)\sigma$$

$$f \circ g = Id_{S_n \setminus A_n}$$

$$g \circ f = Id_{A_n}$$

לכן מספר התמורות הזוגיות שווה למספר התמורות האיזוגיות. ולכן זה חצי מגודל החבורה כולה.

פעולות של חבורות על קבוצות

תהי G חבורה וX קבוצה. פעולה של G על X היא פונקציה

$$G \times X \to X$$

$$(g, x) \to x'$$

מסמנים את הפונקציה הזאת ב $g * x$ או לפעמים רק gx.

ומקיימת 2 תכונות:

1. טרנזיטיביות $g * (h * x) = (gh) * x$
2. $e * x = x$ לכל $x \in X$.

G פועלת על X מסמנים ב $\curvearrowright$.

דוגמאות:

1. S_n פועלת על הקבוצה $\{1,..,n\}$. S_n זה פשוט פונקציות מ$\{1...n\}$ לעצמו. אז $\sigma * m = \sigma(m)$
2. $GL_n(\mathbb{F})$ פועל על $\mathbb{F}^n$, $A * v = Av$

3. כל חבורה פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל $g * h = gh$
4. האם כפל מימין גם ייתן פעולה?

$$g * h = hg$$

$$g_1 * (g_2 * h) = g_1 * (hg_2) = hg_2g_1$$

$$(g_1g_2) * h = hg_1g_2$$

זה יוצא פעולה רק עבור חבורות אבליות.
אם G אבלית אז ברור שיש שוויון.
אם יש שוויון כזה לכל איבר בחבורה, אז יש שוויון בפרט עבור e, ונקבל $g_1g_2 = g_2g_1$
5. G פועלת על הצמדה ע"י הצמדה.

$$g * h = g^{-1}hg$$

6. S_n פועלת על פולינומים בn משתנים $\mathbb{F}[x_1, .., x_n]$, כל תמורה עושה בעצם תמורה על המשתנים של הפולינום.

$$(1, 2) * (x_1x_2 + x_3^2 - 2x_1) = x_2x_1 + x_3^2 - 2x_2$$

7. D_n פועלת על מצולע סימטרי עם n צלעות.

הגדרה: פעולה נקראת "נאמנה" אם האיבר היחיד בחבורה שמשאיר את כל איברי הקבוצה במקום, (האיבר היחיד שפועל טריוויאלית) הוא e.

דוגמאות:
1. S_n על הקבוצה $\{1, .., n\}$ היא נאמנה. האיברים של S_n הם פשוט הפוקנציות החח"ע ועל מ$\{1, .., n\}$ לעצמו. לפי הגדרה, פורנציה שמשאירה הכל במקום היא פונקציית הזהות, שזה איבר היחידה.
2. $GL_n(\mathbb{F})$ פועל על $\mathbb{F}^n$, $A * v = Av$.
המטריצה היחידה שמשאירה את כל הוקטורים במקום היא I. כי בפרט, $Ae_i = e_i$. אבל $Ae_i = c_i(A)$.
3. כל חבורה פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל $g * h = gh$
הפעולה נאמנה. כי אם

$$gh = h$$

אז נכפול בהופכי של h ונקבל $g = e$.
4. אותו דבר
5. פעולת ההצמדה: אם יש איבר במרכז (איבר g שמתחלף עם כל איברי החבורה) אז

$$g^{-1}hg = h$$

למעשה זה אם ורק אם.
כלומר, אם לכל h

$$g*h=h$$

כלומר

$$g^{-1}hg=h$$

אז בהכרח g במרכז.
הפעולה תהיה נאמנה אמ"ם $Z(G)$ טריוויאלי. למשל S_n לכל $n \geq 2$.
6. S_n על פולינומים. נאמנה.
7. D_n על מצולע משוכלל עם n צלעות, נאמנה.
פעולות נוספות:
1. אם G חבורה ו$H \trianglelefteq G$ אז G פועלת על H ע"י הצמדה. כלומר

$$g*h=g^{-1}hg$$

הפעולה נאמנה אמ"ם המרכז של H בG, $C_G(H)=\{e\}$ (המרכז של תת חבורה בתוך חבורה, זה אוסף האיברים בחבורה הגדולה שמתחלפים עם כל איבר בתת החבורה.
למשל, $G=D_4$ ו$H=\langle\sigma^2\rangle$ אז

$$C_G(H)=G$$

2. תהי G חבורה ו$H \leq G$, אז G על קבוצת המנה G/H, כלומר על אוסף הקוסטים ע"י כפל מימין.

$$g*(g'H)=gg'H$$

האם הפעולה נאמנה? האם קיים g כך שלכל $g' \in G$

$$gg'H=g'H$$

כלומר

$$g'^{-1}gg' \in H$$

g חייב להיות בH כי ניתן לקחת את g' להיות e.
אם H נורמלית אז כל איבר מH משאיר את הכל במקום. כי אז

$$h*(gH)=h*(Hg)=hHg=Hg=gH$$

אם H היא תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית הפעולה אף פעם לא נאמנה, כי כל איבר מH משאיר הכל במקום.

אחרת, צריך עיון.
הגדרות: תהי G חבורה שפועל על קבוצה X
1. לכל $x \in X$, המסלול של x,

$$orb(x) = \{g * x | g \in G\}$$

הערה: ניתן להגדיר על הקבוצה X יחס שקילות ע"י $x \sim y$ אם הם נמצאים באותו מסלול (כלומר, קיים g כך ש $gx = y$). זה יוצא יחס שקילות, והמסלולים הם מחלקות השקילות.
2. לכל $x \in X$, המייצב של x

$$stab(x) = \{g \in G | g * x = x\}$$

המייצב הוא תת חבורה.
הגדרה: הפעולה נקראת "טרנזיטיבית" אם יש רק מסלול אחד. כלומר, כל איבר נשלח לכל איבר.
1. $GL_n(\mathbb{F})$ על $\mathbb{F}^n$- $\{0\}$ הוא מסלול בפני עצמו. וכל שאר הוקטורים נמצאים במסלול אחד. כי לכל $v, u \neq 0$ ניתן להשלים לבסיס, ולהגדיר העתקה שתשלח את הבסיס לבסיס ובפרט את v לu. וכל העתקה לינארית ניתן לממש ע"י מטריצה.
אם נוריד את וקטור ה0 נקבל פעולה טרנזיטיבית.
בנוסף, המייצב של כל איבר אינו טריוויאלי. בהינתן וקטור v אפשר למצוא אינסוף מטריצות שונות A כך ש $Av = v$. (ניתן לעשות זאת ע"י משפט ההגדרה).
2. חשבו מסלול ומייצב של $x_1x_2 + x_3x_4$ בתוך S_4.
פתרון:

$$stab = \{(1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4), (1,2), (3,4), e, (1,3,2,4), (4,2,3,1)\}$$

$$orb = \{x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_4 + x_3x_2, x_1x_3 + x_2x_4\}$$

משפט מסלול-מייצב: לכל x מתקיים:

$$[G : stab(x)] = |otb(x)|$$

תרגיל: תהי G חבורה שפועלת על X, ונניח שיש בX איבר שהמסלול שלו מאורך 2. הוכיחו שG אינה חבורה פשוטה.
הוכחה: קיים $x \in X$ כך ש$|otb(x)| = 2$ ולכן $stab(x)$ הוא תת חבורה מאינדקס 2, וכל תת חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית.
איך מחשבים הצמדות בS_n?

$$\sigma^{-1}(i_1, .., i_k)\sigma = (\sigma(i_1), .., \sigma(i_k))$$

דוגמא: $\sigma = (1,3)(4,5,6)$ ו$\tau = (1,4,5)$

חשבו :

$\sigma^{-1}\tau\sigma$

$\tau^{-1}\sigma\tau$

פתרון :

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=(\sigma(1),\sigma(4),\sigma(5))=(3,5,6)$$

$$\tau^{-1}\sigma\tau=(\tau(1),\tau(3))(\tau(4),\tau(5),\tau(6))=(4,3)(5,1,6)$$

הערה : המסלול של תמורה בפעולת ההצמדה הוא אוסף התמורות עם אותו מבנה מחזורים.
הערה : למסלולים בפעולת ההצמדה קוראים מחלקות צמידות.
מסקנה : בS_n מחלקות הצמידות הם כל האיברים עם אותו מבנה מחזורים.
תרגיל : כמה איברים בS_n מתחלפים עם $(1,2)(3,4)$?
פתרון : איבר מתחלף עם $(1,2)(3,4)$ אמ"ם להצמיד בו את $(1,2)(3,4)$ נקבל את $(1,2)(3,4)$.
זה שקול להגיד שהאיבר שייך למייצב של $(1,2)(3,4)$ היחס לפעולת ההצמדה.

$$|G|=|stab(x)||orb(x)|$$

לכן בשביל לגלות את הגודל של המייצב מספיק לחשב את הגודל של המסלול.
המסלול שווה לאוסף התמורות עם אותו מבנה מחזורים.

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2\cdot2\cdot2}$$

צריך לבחור 2 מספרים, אבל הסדר בינהם לא משנה, בשביל המחזור הראשון.
ואז לבחור 2 מספרין ממה שנשאר, הסדר בינהם לא משנה, בשביל המחזור השני.
אבל הסדר בין המחזורים לא משנה, אז מחלקים שוב ב2.
מספר האיברים שמתחלפים הוא :

$$\frac{n!}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2\cdot2\cdot2}}$$

משוואת המחלקות :
תהי G חבורה שפועלת על X. לאוסף הנקודות שהמסלול שלהם מכיל רק אותם נקרא "נקודות שבת", מסמנים $fp(X)$.
$x\in fp(X)$ אמ"ם לכל $g\in G$ $gx=x$.
מתקיים :

$$|X|=|fp(x)|+\sum_{x\in X}orb(x)$$

עד כדי יחס השקילות, לא כולל מסלולים מאורך 1 .

כלומר, הגודל של X שווה למספר נקודות השבת, ועוד סכום הגדלים של המסלולים.

הערה: ממשפט מסלול מייצב מקבלים שהגודל של כל מסלול מחלק את גודל החבורה, כאשר החבורה סופית.

$$[G : stab(x)] = |orb(x)|$$

$$[G : stab(x)] = \frac{|G|}{stab(x)}$$

לכן

$$|orb(x)| \mid |G|$$

תרגיל: נתון שהחבורה $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ פועלת על קבוצה מגודל 223. הוכיחו שלפעולה יש נקודת שבת.

הוכחה: $|G| = 27$.

אם אין נקודת שבת אז

$$223 = \sum orb(x)(\neq 1)$$

כלומר, 223 שווה לסכום גדלי המסלולים, אין מסלול מגודל 1 מההחנה, וכל גדלי המסלולים מחלקים את 27.

לכן הם שווים ל- $3, 9, 27$.

$$223 = 3a + 9b + 27c$$

סתירה, כי 223 לא מתחלק ב3.

הערה: מחלקות הצמידות בחבורה מחלקות את סדר החבורה, כי זה בעצם מסלולים ביחס לפעולת ההצמדה.

תרגיל: תהי G חבורה מסדר p^n (p ראשוני) ו$H \trianglelefteq G$ מגודל p. הוכיחו ש $H \subseteq Z(G)$

הוכחה: H נורמלית ולכן סגורה להצמדות. כלומר, לכל $h \in H$, מחלקת הצמידות של h מוכלת בH.

הגודל של מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה ולכן הוא שווה או ל1 או לחזקה של p, אבל הוא מוכל בH, ולכן הוא שווה או ל1 או לp.

בתוך H יש את e. מחלקת הצמידות של e זה רק e. כי $g^{-1}eg = e$. אז לכל $e \neq h \in H$ נקבל שמחלקת הצמידות שלו לא מכילה את e, ולכן מוכלת ב$H \setminus \{e\}$, כלומר, מוכלת בקבוצה מגודל $p - 1$, לכן היא מגודל 1.

כלומר, כל איבר בH מחלקת הצמידות שלו שווה רק אליו.

יהי $h \in H$,

$$g^{-1}hg = h$$

לכל $g \in G$.
לכן h מתחלף עם כל $g \in G$. כלומר, $h \in Z(G)$.
סימון: מחלקת צמידות של איבר x מסמנים ב$conj(x)$.