תרגול 12 (ואחרון) – חישובי אינטגרלים

שיטת הטרפז

תרגיל:

חשב את האינטגרל הבא בעזרת שיטת הטרפז, $h=\pi,\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$$

פתרון:

עבור $h=\pi$:

$h=\frac{b-a}{m}$ כאשר m = מספר הקטעים.

$\underbrace{\pi}_{\text{נתון}}=\frac{\pi-0}{m}=h$ ולכן ניתן לראות ש$m=1$ ונשתמש בכלל טרפז פשוט.

$$I\approx\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]h$$

נציב:

$$I\approx\left[\frac{f(0)+f(\pi)}{2}\right]\cdot\pi\approx-34.779$$

עבור $h=\frac{\pi}{2}$:

$$h=\frac{b-a}{m}=\frac{\pi-0}{\mathrm{m}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow m=2$$

בגלל ש$m=2$ נשתמש בכלל הטרפז המוכלל.

נסמן את הנקודות שבהן יגמר טרפז אחד ויתחיל טרפז אחר בx_i.
קל לראות ש $x_i=x_0+i\cdot h\,,\quad 0\le i\le 2$.

ולכן: $x_0=0,x_1=\frac{\pi}{2},x_2=\pi$.

$$I\approx\frac{h}{2}\left[f(0)+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)\right]$$

נציב את h:

$$I\approx\frac{\pi}{4}\left[f(0)+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)\right]\approx-17.389$$

תזכורת לכלל הטרפז המוכלל (ליותר מטרפז אחד):

$$I_{\text{קירוב}}\approx\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+i\cdot h)+f(b)\right]$$

נחסום גם את השגיאה:

$$E \le \left(\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right)\cdot\left|f^{(2)}(c)\right|$$

כאשר $c\in[a,b]$ כלשהו (נמצא חסם מקסימלי)

שיטת סימפסון

תרגיל:

חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)}dx$ בשיטת סימפסון עבור:

א. $m=1$.

ב. $m=2$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x)}=0$$

עבור כלל סימפסון $h=\frac{b-a}{2m}$ ($m=$ מספר הפעמים שנפעיל את כלל סימפסון)

א. $m=1$ לכן נשתמש בסימפסון פשוט.

$$h=\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}$$

בנוסף נגדיר $x_i=\underbrace{x_0}_{\text{נקודת ההתחלה}}+i\cdot h$, $0\le i\le 2m$. (נקודות שריג)

לכן: $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$.

$$I\approx\frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

נציב:

$$I\approx\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]\approx 0.5457$$

ב. $m=2$ ולכן נשתמש בסימפסון פשוט פעמיים.

$$h=\frac{1-0}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$$

נקודות החלוקה: $x_i=x_0+i\cdot h$, $0\le i\le 4$ ולכן:

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{3}{4}, x_4=1$$

שימו לב שנשתמש בסימפסון פעם אחת עבור הקטע $[x_0,x_2]$ ופעם אחת עבור הקטע $[x_2,x_4]$. ולכן נקבל:

$$I\approx\frac{h}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]\approx 0.54222$$

תרגיל:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1.25
$f(x)$	0.5	0.707	0.866	1	1.118

חשבו את $\int_{\frac{1}{4}}^{1.25} f(x)dx$ בעזרת שיטת סימפסון.

פתרון:

קל לראות ש- $h=\frac{1}{4}$ ולכן:

$$h=\frac{b-a}{2m}=\frac{1.25-0.25}{2m}=\frac{1}{2m}=\frac{1}{4}\Longrightarrow \boxed{m=2}$$

לכן נפעיל את כלל סימפסון הרגיל פעמיים. (פעם אחת על הקטע $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ ופעם אחת על הקטע $[\frac{3}{4},1\frac{1}{4}]$).

ונקבל: $I\approx\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]=$

$$=\frac{1}{12}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+4f(1)+f(1.25)\right]\approx 0.848107$$

תרבוע גאוס

שיטת גאוס לג'נדר עבור האינטגרל מהצורה $\int_{-1}^{n} f(x) \underbrace{\mu(x)}_{\text{פונקציית משקל}} dx$.

$\mu(x)=1$ במקרה של לג'נדר.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} w_i\cdot f(x_i)+E_n$$

x_i – צמתים ← שורשים של פולינום אורתוגונלי. בפרט בלג'נדר x_i שורשים של פולינום לג'נדר מדרגה n.

w_i – משקלים.

n – מספר הנקודות שנלקחו.

נחשב את החסם לשגיאה:

$$E_n\le\frac{(2^{2n+1}(n!)^4)\cdot f^{(2n)}(c)}{(2n+1)\cdot\left((2n)!\right)^3}$$

כאשר $c\in[-1,1]$.

דוגמה:

נחשב את האינטגרל $I = \int_0^1 \sqrt{e^{1.5x} - 1}\ \ dx$ בשיטת לג'נדר.

נעשה הצבה כך שנעביר את הקטע $[0,1]$ לקטע $[-1,1]$ (ההצבה משנה את הגבולות).

משוואה להעברת קטע $[a,b]$ לקטע $[-1,1]$:

$$t = \frac{2}{b-a} \cdot (x-b) + 1$$

נשתמש במשוואה לעיל:

$$t = \frac{2}{1-0} \cdot (x-1) + 1$$
$$t = 2x - 1$$

$$\boxed{x = \frac{t+1}{2}}$$

אזי: $dx = \frac{1}{2} dt$.

ולכן: $I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1 dt}$ (פונקציית המשקל =1)

נחשב את האינטגרל $\int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1}}_{\text{נסמן} g(t)} dt$ באמצעות 3 נקודות.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1}\, dt \approx \overbrace{w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) + w_3 g(t_3)}^{\text{סכימה}}$$

הצמתים t_1, t_2, t_3 הם שורשי פולינום לג'נדר מדרגה 3.

$$p_3(x) = \frac{(5x^3 - 3x)^2}{2} = 0 \implies t_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}, t_2 = 0, t_3 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

כדי למצוא את w_i נעזר במשפט:

הסכימה של תרבוע גאוס מדויקת על כל פולינום שדרגתו קטנה או שווה לדרגת הפ"א.

כלומר: $\int_{-1}^{1} x^k dx = \sum_i w_i \cdot t_i^k$

ולכן הסכימה מדויקת עבור כל פולינום שקטן או שווה ל3 $n = 3$.

$$\int_{-1}^{1} 1\, dt = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} t\,dt = w_1 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} + w_2 \cdot 0 - w_3 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} t^2\,dt = w_1 \cdot \frac{5}{3} + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $w_1 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}, w_3 = \frac{5}{9}$.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1}\,dt \approx \frac{5}{7} g\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$\int_{0}^{1} \underbrace{\sqrt{e^{1.5x} - 1}}_{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{t+1}{2}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}{2}\right) + \frac{8}{9} f\left(\frac{0+1}{2}\right) + \frac{5}{9} f\left(\frac{-\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}{2}\right)\right]$$

שיטת גאוס צ'בישב

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

כאשר $x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$ ו $1 \le i \le n$.

נגדיר גם $w_i = \frac{\pi}{n}$.

נחסום את השגיאה:

$E_n = \frac{\pi}{(2n)! \cdot 2^{2n-1}} \cdot f^{(2n)}(c)$ ו $c \in (-1,1)$.

פונקציית המשקל היא: $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

תרגיל:

חשב את $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ עבור דרגת דיוק אלגברית 5.

$N = 2n - 1$ היא דרגת הדיוק האלגברית וn היא דרגת הקירוב – דרגת הפולינום.

פתרון:

$$N = 5 \Longrightarrow 2n - 1 = 5 \Longrightarrow 2n = 6 \Longrightarrow n = 3$$

לכן נצטרך 3 נקודות.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\overbrace{e^x}^{f(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3} f(x_1) + \frac{\pi}{3} f(x_2) + \frac{\pi}{3} f(x_3)$$

מצאנו ש$n=3$ ולכן: $x_3=\left(\frac{5\pi}{6}\right), x_2=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right), x_1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ נציב ונקבל את מה שביקשו.

חומר לקריאה עצמית

נלמד כיצד ניתן לבנות 'משפחת' פולינומים אורתוגונלית באמצעות נוסחה רקורסיבית.

נגדיר את:

$$P_{n+1}(x)=(x-B_n)P_n(x)-C_nP_{n-1}(x)$$

כך ש:

$$B_n=\frac{\langle xP_n,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle}, C_n=\frac{\langle xP_n,P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle}$$

ונבחר:

$P_0=1$ ו $P_1(x)=(x-B_0)P_0(x)$

תרגיל:

קרב את האינטגרל $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{1}{2}}dx$ באמצעות שתי נקודות דגימה.

פתרון:

אנחנו נשתמש בקירוב גאוס, כלומר נבנה פולינום אורתוגונאלי (בשיטה שכתובה לעיל) ממעלה 2 בקטע $[0,1]$ ביחס לפונקציית המשקל $w_i=x^{-\frac{1}{2}}$.

לפי השיטה נקבל:

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x-\frac{1}{3}$$
$$P_2(x)=x^2-\frac{6x}{7}+\frac{3}{35}$$

נמצא את השורשים של $P_2(x)=0$ ונקבל: $x_0\approx 0.7416, x_1\approx 0.1156$.

כעת נמצא את המקדמים בשיטת השוואת המקדמים (ממש כמו בתרגילים הקודמים). אנחנו נציב את הפולינומים 1 ואת $P_1(x)$ (ולא את x כמו שעשינו בתרגילים הקודמים. זה הטריק בתרגיל הזה, והוא יעזור לנו בחישוב. למעשה גם אם היינו מציבים את x היינו מגיעים לאותו פתרון, אבל דרך זו יותר יעילה).

נקבל:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = A_0 + A_1 = 2$$

$$\int_0^1 \left(x-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{2}}\,dx = A_0 \cdot \left(x_0 - \frac{1}{3}\right) + A_1 \cdot \left(x_1 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $A_0 \approx 0.696\ ,\ \ A_1 \approx 1.304$.

לכן הקירוב יהיה:

$$\int_0^1 f(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx \approx 0.696\cdot f(0.743) + 1.304 \cdot f(0.116)$$

שימו לב:

נשאלת השאלה איזו סיבה יש להשתמש בשיטה הזו? למה שנצטרך פונקציית משקל? הרי יכולנו לסמן $g(x) = f(x)w(x)$ ואז במקום לחשב את $\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ היינו מקרבים אינטגרל רגיל של $\int_a^b g(x)\,dx$ בעזרת שיטת הטרפז.

התשובה פשוטה. לא תמיד יהיה פשוט לקרב אינטגרל רגיל של פונקציה מסוימת. למשל אם נרצה לחשב את $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ שיטת הטרפז לא תהיה יעילה (כי הפונקציה שואפת לאינסוף ב0 וקשה לקרב אותה שם).

גם אם נשתמש בשיטת גאוס ללא פונקציית המשקל לא נקבל דיוק טוב כי לא ניתן לקרב פונקציה סינגולרית על ידי פולינום.