אנליזה מודרנית 1 תרגול 12

15 בינואר 2015

0.1 מרחב ℓ^p $(I,\mathbb{A},\mu)$

I קבוצה $\mathbb{A}=\mathbb{P}(I)$, μ מידת הספירה מעל $\mathbb{A}$.

$$\ell^p(I):=L^p(\mu)$$

במקרה הפרטי $I=\mathbb{N}$.

$$\ell^p:=\ell^p(\mathbb{N})$$

פו' מ־$\mathbb{N}$ל־$\mathbb{C}$ תסומן $(x_i)_{\mathbb{N}}$, x_iהוא ערך הפו' ב־i. כל פו' שכזו מדידה $\mathbb{A}$. שיוויון כאן שקול לשיוויון כב"מ. חסם מלעיל שקול לesssup (כי $0=\mu(E) \Leftarrow E=\emptyset$) ולכן

$$\|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_\infty=\sup_{\mathbb{N}}|x_i|$$

ועבור $p<\infty$:

$$\int_{\mathbb{N}}|(x_i)|^p\,d\mu=\sum_{\mathbb{N}}|x_i|^p$$

בעזרת ההתכנסות המונוטונית

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_i|^p=\sup_{\text{finite}T\subset\mathbb{N}}\sum_{i\in T}|x_i|^p=\sup_{\text{finite}T}\int_T|x_i|^p\,d\mu$$

$$\begin{aligned}\ell^p &= \left\{(x_i)_{\mathbb{N}}\middle|\forall i\in\mathbb{N},x_i\in\mathbb{C},\|(x_i)\|_p<\infty\right\}\\ \|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_\infty &= \sup_{\mathbb{N}}|x_i|\end{aligned}$$

כשלכל $0<p<\infty$:

$$\|(x_i)\|_p=\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

אי"ש $H\ddot{o}lder$ (עבור $1\le p\le\infty$):

$$p^{-1}+q^{-1}=1\Rightarrow\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_iy_i|\le\|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_p\|(y_i)_{\mathbb{N}}\|_q$$

<u>מקרה פרטי:</u> $I=\{1,\dots,n\}$.

$$\left(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_p\right)=\ell^p\left(\{1,\dots,n\}\right)$$

פונקציה $(x_i)_{1\le i\le n}$: מ-$\{1,\dots,n\}$ ל-$\mathbb{C}$ נזהה אותה עם ה-n יה הסדורה $(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{C}^n$.

$$\left\|(x_i)_{1\le i\le n}\right\|_p=\left(\sum_1^n|x_i|^p\right)^{1/p}\qquad 1\le p<\infty$$

$$\left\|(x_i)_{1\le i\le n}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

תרגיל:

הוכיחו:

$$1\le r<p<\infty\Leftarrow\ell^r\subsetneq\ell^p$$

הוכחה:

תהי $a=(a_n)_{\mathbb{N}}\in\ell^r$ אזי:

$$\begin{aligned}(1)\quad&\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^r&<&\quad\infty\\(2)\quad&\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p&=&\quad\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^r|a_n|^{p-r}\end{aligned}$$

לפי (1) קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $|a_n|^r<1$ ולכן לכל $n>n_0$, $|a_n|<1$ $\Leftarrow$ $|a_n|^{p-1}<1$. מכאן לפי (2) ולפי מבחני ההשוואה (בנוסח אם ממקו מסוים ואילך $|b_n|\le|c_n|$ אז $\sum_1^\infty|b_n|<\infty$). עבור $|c_n|=|a_n|^r$

$$\sum_1^\infty|a_n|^p<\infty\Rightarrow a\in\ell^p\Rightarrow\ell^r\subseteq\ell^p$$

נוכיח כי ההכלה אמיתית. נגדיר $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ע"י

$$\forall n\in\mathbb{N},a_n:=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/r}$$

אזי

$$|a_n|^r=\frac{1}{n}\Rightarrow\|a_n\|_r^r=\sum\frac{1}{n}=\infty$$

ולכן $a\in\ell^r$. לע"ז:

$$1<\frac{p}{r}\qquad|a_n|^p=\frac{1}{n^{p/r}}\Rightarrow\|a\|_p^p=\sum_1^\infty\frac{1}{n^{p/r}}<\infty$$

ו$a\in\ell^p$. $\ell^r\subsetneq\ell^p$.

תרגיל

הוכיחו: אם $1 \le p < \infty$ אזי

$$\begin{aligned} a_n : &= n^{-1/p}(1+\log n)^{-2/p} \\ a &:= (a_n)_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

אזי

$$a \in \ell^p - \bigcup_{1 \le r < p} \ell^r$$

$\Leftarrow \bigcup_{1 \le r < p} \ell^r \subsetneq \ell^p$.

הוכחה:

$$\sum_{n=10}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{10}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+\log n)^2} \le \sum_{10}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(\log n)^2} < \infty \Rightarrow a \in \ell^p$$

יהי $1 \le r < p$.

$$\begin{aligned} \sum_{10}^{\infty} |a_n|^r &= \sum_{10}^{\infty} \frac{1}{n^{r/p}} \frac{1}{(1+\log n)^{\frac{2r}{p}}} \\ 0 < \frac{r}{p} < 1 \qquad &= \sum_{10}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\frac{n^{1-\frac{r}{p}}}{(1+\log n)^{2r/p}}}_{\to \infty} \end{aligned}$$

לכן לכל $n > n_0$, $|a_n|^n \ge \frac{1}{n}$ וכיוון ש$\sum \frac{1}{n} = \infty$ הרי $\sum |a_n|^r = \infty$ ו$a \notin \ell^r$ וזאת לכל $1 \le r < p$.

טענה:

יהי $\mathcal{H}$מרחב הילברט ויהי M תת מרחב לינארי סגור ב$\mathcal{H}$.תהי $f \in \mathcal{H}$ אזי

$$d(f,M) = \sup\left\{ \langle f,g \rangle \middle| g \in M^{\perp}, \|g\| = 1 \right\}$$

$$[d(f,M) := \inf\{\|x-z\| \mid z \in M\}]$$

כשבמקרה זה הsupהוא הmaxוהinf הוא הmin.

הוכחה:

לפי הגדרת $d(f,M)$כinf וכיוון שM סגור (ב$\mathcal{H}$ הילברט), הinf הוא min. יהי $g \in M^{\perp}$ כך ש$\|g\| = 1$ אז לכל $t \in M$

$$|\langle f,g \rangle| = |\langle f-t+t,g \rangle| = \left| \langle f-t,g \rangle + \underbrace{\langle t,g \rangle}_{=0} \right| = |\langle f-t,g \rangle| \overset{\text{c.s}}{\le} \|f-t\| \, \|g\| = \|f-t\|$$

לכן, לכל $t\in M$

$$\alpha\le\|f-t\|\Rightarrow\alpha\le\inf_{t\in M}\|f-t\|=d\left(f,M\right)$$

מכיוון שM תת מרחב לינארי סגור של מרחב הילברט אז $f\in\mathcal{H}=M\oplus M^{\perp}$ לכן קיימים $g_{1}\in M^{\perp}$, $t_{1}\in M$ כך ש:

$$f=g_{1}+t_{1}$$

אם $f\in M$ אז $d\left(f,M\right)=0$ ולכל $g\in M^{\perp}$,

$$\left|\left\langle f,g\right\rangle \right|=0$$

לכן במקרה זה $\alpha=d\left(f,M\right)=0$. אם $M\neq\mathcal{H}$ נקבע $0\neq g_{0}\in M^{\perp}$.

$$g:=\frac{g_{0}}{\|g_{0}\|}$$

ואז $\|g\|=1$ אז

$$\left|\left\langle f,g\right\rangle \right|=d\left(f,M\right)=0$$

לכן הsupהוא max . אם $f\notin M$ אזי $g_{1}\neq0$ לכן נגדיר

$$g:=\frac{g_{1}}{\|g_{1}\|}$$

$\|g\|=1$:

$$\begin{aligned}\alpha & \ge & \left|\left\langle f,g\right\rangle \right|=\frac{\left|\left\langle f,g\right\rangle \right|}{\|g_{1}\|}=\frac{\left|\left\langle \overbrace{t_{1}+g_{1}}^{f},g_{1}\right\rangle \right|}{g_{1}}=\frac{\left|\left\langle t_{1},g_{1}\right\rangle +\left\langle g,g_{1}\right\rangle \right|}{\|g_{1}\|}\\ & = & \frac{\|g_{1}\|^{2}}{\|g_{1}\|}=\|g_{1}\|=\|f-t_{1}\|\ge d\left(f,M\right)\end{aligned}$$

וגם כאן הsup הוא max המתקבל עבור g שהגדרנו ובסה"כ $\alpha=d\left(f,M\right)$.

טענה:

יהיו $\mathcal{H}:=L^{2}\left[-1,1\right]$ עם מידת לבג m . נגדיר

$$M:=\left\{ f\in\mathcal{H}\mid f\left(t\right)\overset{a.e}{=}f\left(-t\right)\right\}$$

הוכיחו כי M תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$ וחשבו את $M^{\perp}$ ואת ההיטל P_{M} (כשלכל $f\in\mathcal{H}$, $f=p_{M}f+h$ באשר $p_{M}f\in M$, $h\in M^{\perp}$).

פתרון:

קל לבדוק שM ת"מ לינארי (ודאו). צריך להראות כי אם $f \in \mathcal{H}$ ו־$\{f_n\}_{\mathbb{N}} \subset M$ כך שב$\mathcal{H}$

$$f_n \xrightarrow{L_2} f \left(\Leftrightarrow \|f - f_n\| \to 0\right)$$

אזי $f \in M$.

הערה:

לא נובע מכך ש$f_n(x) \to f(x)$ כב"מ אבל קיימת תת סידרה $\{f_{n_j}\}$ כך ש$f_{n_j} \longrightarrow f$ כב"מ.

$$\{x \mid f(x) \neq f(-x)\} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \mid f_{n_j}(x) \neq f_{n_h}(-x)\}$$

אך זו קבוצה ממידה 0. $\Leftarrow$ $m\{x \mid f(x) \neq f(-x)\} = 0$ לכן $f \in M$. M תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$ כזכור לכל $f, g \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-1}^{1} f \bar{g} dm \\ N &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \mid f(t) \stackrel{a.e}{=} -f(t) \right\} \end{aligned}$$

אם $f \in M$, $g \in N$ אז $\langle f, g \rangle = 0$ ולכן $N \subseteq M^{\perp}$. לכל $f \in \mathcal{H}$, $-1 \leq t \leq 1$:

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{M} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\in N \subseteq M^{\perp}}$$

מיחידות הפירוק:

$$(P_M f)(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

בפרט עבור $f \in M^{\perp}$

$$f = g + h$$

g איבר של M וh איבר של $N \ni M^{\perp}$ כפירוק הניצב וזאת לכל $f \in \mathcal{H}$ ולכן עבור $g = 0$ נקבל $f \in N$ $.N = M^{\perp}$

טענה:

יהי $\mathcal{H}$מרחב הילברט M ת"מ לינ' סגור של H אז $M = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

הוכחה:

$M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ כיוון שלכל $f \in M, g \in M^{\perp}$

$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} = 0 \Rightarrow f \in M^{\perp^{\perp}}$$

נוכיח כי $M^{\perp^{\perp}} \subseteq M$. M ת"מ לינארי סגור של $\mathcal{H}$ ו$\mathcal{H}$ מרחב הילברט לכן $H = M \oplus M^{\perp}$ ובפרט לכל $f \in M^{\perp^{\perp}}$.

$$f = g + h$$

באשר $g \in M, h \in M^{\perp}$ והראנו $M \subseteq M^{\perp^{\perp}}$ לכן $g \in M^{\perp^{\perp}}$.

$$M^{\perp^{\perp}} \ni f - g = h \in M^{\perp}$$

אבל $M^{\perp^{\perp}} \cap M^{\perp} = \{0\}$ לכן $f - g = 0$ כלומר $f = g \in M \Leftarrow M^{\perp^{\perp}} \subseteq M$ ובסה"כ $M^{\perp^{\perp}} = M$.

תרגיל

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(A)$ אי שלילית הראו ש

$$\lim_{a \to 1^-} \int_A f^a = \int_A f$$

פתרון:

תהי $(a_n)_{\mathbb{N}}$ סידרה עולה כך ש$a_n \to 1$ ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית הנשלטת עבור $g = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{f \le 1\}} f^{a_n} = \int_{\{f \le 1\}} f$$

לפי משפט ההתכנסות הנשלטת (אפשר גם עם המונוטונית)

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{f > 1\}} f^{a_n} = \int_{\{f > 1\}} f$$

עבור $g = f$. ובסה"כ

$$\int_A f^{a_n} \overset{n \to \infty}{\to} \int_A f$$

וזאת לכל סידרת מספרים עולה ל־1 לכן

$$\lim_{a \to 1^-} \int_A f^a = \int_A f$$