קלאסית 1: תרגול 2:

נושאים: מהירות ותאוצה של חלקיק, מהירות ותאוצה בקורדינטות פולריות, סטטיקה, גלגול ללא החלקה, מרכז מסה, מהירות יחסית.

תזכורת: מהירות ותאוצה של חלקיק

גזירת וקטורים רכיב רכיב:

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{d}{dt}(A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{A} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right) = \left(\frac{d^2A_x}{dt^2}, \frac{d^2A_y}{dt^2}, \frac{d^2A_z}{dt^2}\right)$$

אם מיקום החלקיק נתון ע"י $\vec{r} = (x, y, z)$ אז מהירותו $\vec{V}$ נתונה ע"י:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

תאוצתו $\vec{a}$ נתונה ע"י:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

מהירות יחסית

אם 2 חלקיקים P_1 ו-P_2 נעים במהירויות $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ ותאוצות $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ אז הוקטורים

$$\vec{V}_{P_2|P_1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \quad , \quad \vec{a}_{P_2|P_1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

נקראים המהירות היחסית והתאוצה היחסית של P_2 ביחס ל-P_1.

מהירות ותאוצה בקורדינטות פולריות

נסתכל על חלקיק במישור. אם מיקומו נתון ע"י (r, θ) בקורדינטות פולריות אז:

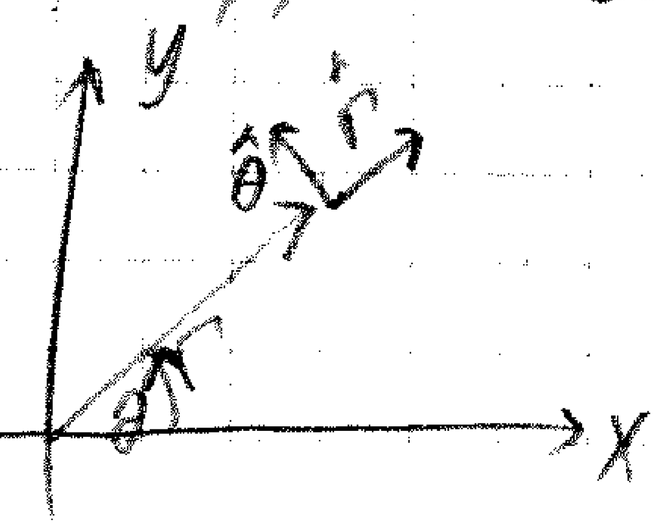
$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\hat{r} + \dot{\theta}r\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$



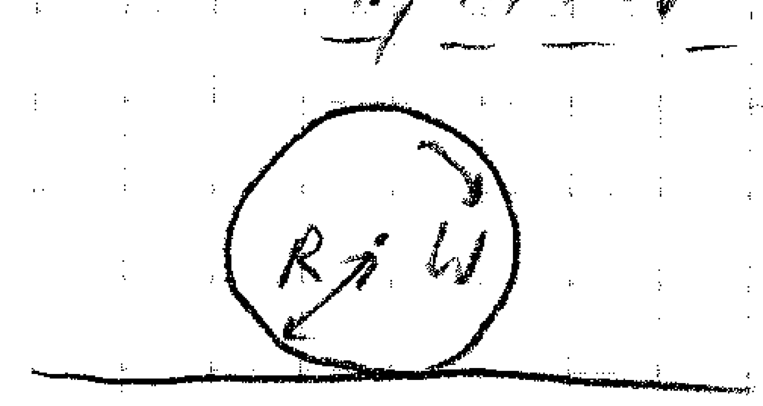
סטטיקה

חוק I: אם שקול הכוחות על גוף מתאפס, הוא מתמיד במהירותו. יש לבדוק את כל רכיבי הכח השקול. תנאי לסטטיות:

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0$$

גלגול ללא החלקה

בגלגול ללא החלקה גוף מסתובב במהירות זוויתית $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, מרכז המסה של הגוף נע במהירות: $V_{cm} = \omega R$ כאשר R רדיוס הגוף



מרכז מסה

בהינתן n גופים במיקומים $\vec{r}_i$ $(i=1..n)$ ומסות m_i מיקום מרכז המסה $\vec{r}_{cm}$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \quad ; \quad \vec{V}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i \quad , \quad \vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

1) מיקומו של חלקיק במרחב נתון ע"י:

$$\vec{r} = 3t^2\hat{x} + (2t^2 - t)\hat{y} + (3t-6)\hat{z}$$

א. מצאו את וקטור המהירות ואת וקטור התאוצה.

ב. מצאו את הזווית בין וקטור המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן.

ג. מהו הערך של t עבורו המהירות מינימלית? מצאו את וקטור המהירות ברגע זה.

<u>פתרון:</u>

א. גוזרים רכיב-רכיב ומקבלים:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t, 4t-1, 3)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (6, 4, 0)$$

ב.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{6\cdot 6t + 4(4t-1)}{\sqrt{52}\sqrt{36t^2+(4t-1)^2+9}} = \frac{52t-4}{\sqrt{52}\sqrt{52t^2-8t+10}}$$

ג. גודל המהירות הוא $V = |\vec{V}|$:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{36t^2 + (4t-1)^2 + 9} = \sqrt{52t^2 - 8t + 10}$$

גודל השורש מינימלי כאשר הביטוי תחת השורש מינימלי:

$$\frac{d}{dt}(52t^2 - 8t + 10) = 0 \Rightarrow 104t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{13}\text{ sec}$$

מציבים זאת בחזרה ל-$\vec{V}$ ומקבלים:

$$\vec{V} = \left(\frac{6}{13}, -\frac{9}{13}, 3\right)$$

תרגיל

נתונות 2 סירות זהות בעלות מהירות V יחסית למים. הסירות מתחילות לנוע מאחת הגדות של הנהר שרוחבו d. הנהר זורם במהירות $\vec{u}=u\hat{x}$ כאשר $u<v$.

סירה א' צריכה לחצות את הנהר אל עבר הנקודה הנמצאת מול נקודת ההתחלה ואז לחזור לנקודת ההתחלה.

סירה ב' צריכה לנוע למרחק d לאורך הנהר ואז לחזור לנקודת ההתחלה. השוואת זמני הלוך ושוב. (סירה ב' לא חוצה את הנהר).

לאיזה סירה דרוש יותר זמן על מנת לחזור לנקודת ההתחלה?

פתרון

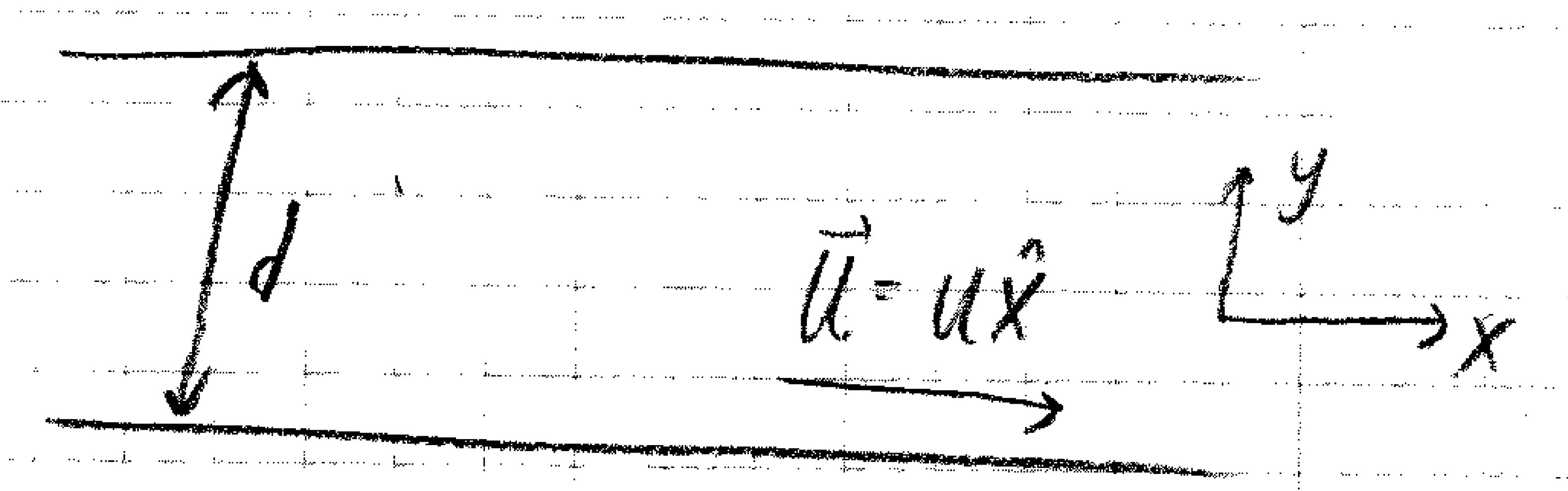
סירה א' בדרך הלוך צריכה להתגבר על זרם הנהר כדי שמהירותה ביחס לקרקע תהיה בכיוון ישר קדימה. על כן מהירותה ביחס לנהר היא:

$$\vec{V}_1=-u\hat{x}+u_2\hat{y}$$

מגודל מהירות הסירה:

$$|\vec{V}_1|=V=\sqrt{u^2+u_2^2}\Rightarrow$$

$$u_2=\sqrt{V^2-u^2}$$



מהירותה בכיוון $\hat{y}$ בדרך חזרה היא באותו גודל $\sqrt{V^2-u^2}$.

$$t_1=\frac{2d}{\sqrt{V^2-u^2}}$$

סירה ב' תנוע במהירות אבסולוטית של $\vec{V}=(u+V)\hat{x}$ בהלוך ו- $\vec{V}=-(V-u)\hat{x}$ בחזור.

$$t_2=\frac{d}{u+V}+\frac{d}{V-u}$$

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{1}{u+V}+\frac{1}{V-u}}{\frac{2}{\sqrt{V^2-u^2}}}=\frac{\frac{\cancel{2}V}{V^2-u^2}\sqrt{V^2-u^2}}{\cancel{2}}=\frac{V}{\sqrt{V^2-u^2}}>1$$

לסירה ב' לוקח יותר זמן.

תרגיל:

אורכו של הוקטור $\vec{r}(t)$ קבוע אך כיוונו משתנה במישור. הראו שמהירות $\vec{v}(t)$ ניצבת במקרה זה ל- $\vec{r}(t)$.

פתרון:

נשתמש בקואורדינטות פולריות r, θ. r קבוע, θ משתנה.

$$\vec{r} = R\hat{r} = R(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$$

אפשר להשתמש בנוסחא מוכנה ל- $\vec{v}$ אך נגזור לפתח בעצמנו:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \cancel{\frac{dR}{dt}}\hat{r} + R\frac{d\hat{r}}{dt} = R\frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = R\dot{\theta}(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = R(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})\cdot(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})R\dot{\theta} = 0$$

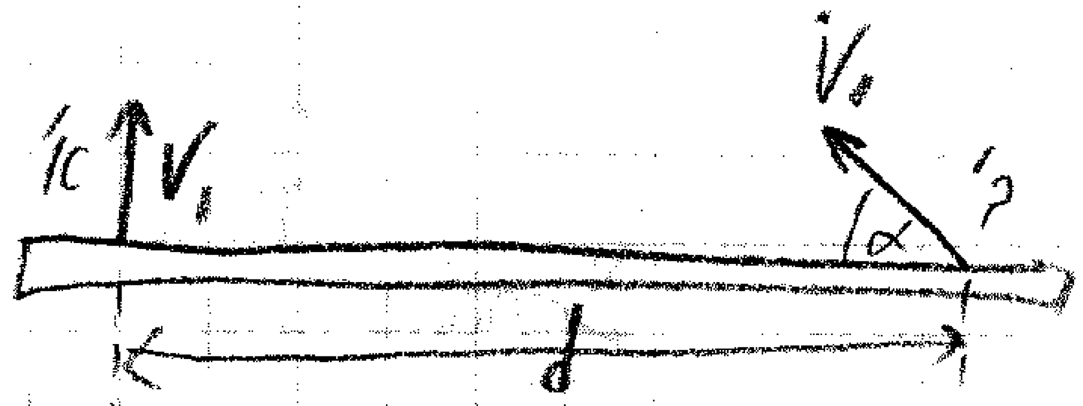
תרגיל:

2 אבנים נזרקות בו זמנית מאותו מישור אופקי. אבן אחת נזרקת אנכית למעלה, והשניה נזרקת במרחק אופקי של d, במהירות V_0 ובזווית α לכיוון האבן הראשונה.

א. באיזו מהירות V_1 יש לזרוק את האבן הראשונה כדי ש-2 האבנים תתנגשנה?

ב. מה הגובה בו תתרחש ההתנגשות?

ג. מהן מהירויות האבנים (גודל וכיוון) בעת ההתנגשות?



פתרון: א. נבחר מערכת צירים שראשיתה במקום הראשוני של האבן שנזרקת אנכית.

לאבן השניה:

$$x_1 = d - V_0\cos\alpha\, t$$

$$y_1 = V_0\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

לאבן הראשונה:

$$x_2 = 0 \quad , y_2 = -\tfrac{1}{2}gt^2 + V_1 t$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow V_0\sin\alpha\, t = V_1 t \Rightarrow V_1 = V_0\sin\alpha$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow t = \frac{d}{V_0\cos\alpha}$$

ב.

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + V_0\sin\alpha\left(\frac{d}{V_0\cos\alpha}\right) = -\frac{1}{2}g\frac{d^2}{V_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} + d\,tg\alpha$$

ג. נגזור את x_1, x_2, y_1, y_2 לקבלת:

$$V_{x,1} = -V_0\cos\alpha, \quad V_{y,1} = V_0\sin\alpha - gt$$

$$V_{x,2} = 0 \quad , V_{y,2} = -gt + V_1$$

בזמן ההתנגשות $t=\frac{d}{V_0\cos\alpha}$ לכן:

$$\vec{V}_1=\left(-V_0\cos\alpha\,,\ V_0\sin\alpha-\frac{gd}{V_0\cos\alpha}\right)$$

$$\vec{V}_2=\left(0,\ -\frac{gd}{V_0\cos\alpha}+V_0\sin\alpha\right)\quad,\ |\vec{V}_2|=\left|-\frac{gd}{V_0\cos\alpha}+V_0\sin\alpha\right|$$

למשוקים לבנות: ערכם מוחלט כי מהירות חיובית כלפי מעלה, כיוון: כלפי מעלה.

נחשב את $|\vec{V}_1|$:

$$|\vec{V}_1|=\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha+\left(V_0\sin\alpha-\frac{gd}{V_0\cos\alpha}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{V_0^2-\frac{2V_0\sin\alpha\, gd}{V_0\cos\alpha}+\frac{g^2d^2}{V_0^2\cos^2\alpha}}=$$

$$=\sqrt{V_0^2-2gd\,tg\alpha+g^2d^2/V_0^2\cos^2\alpha}$$

כיוון:

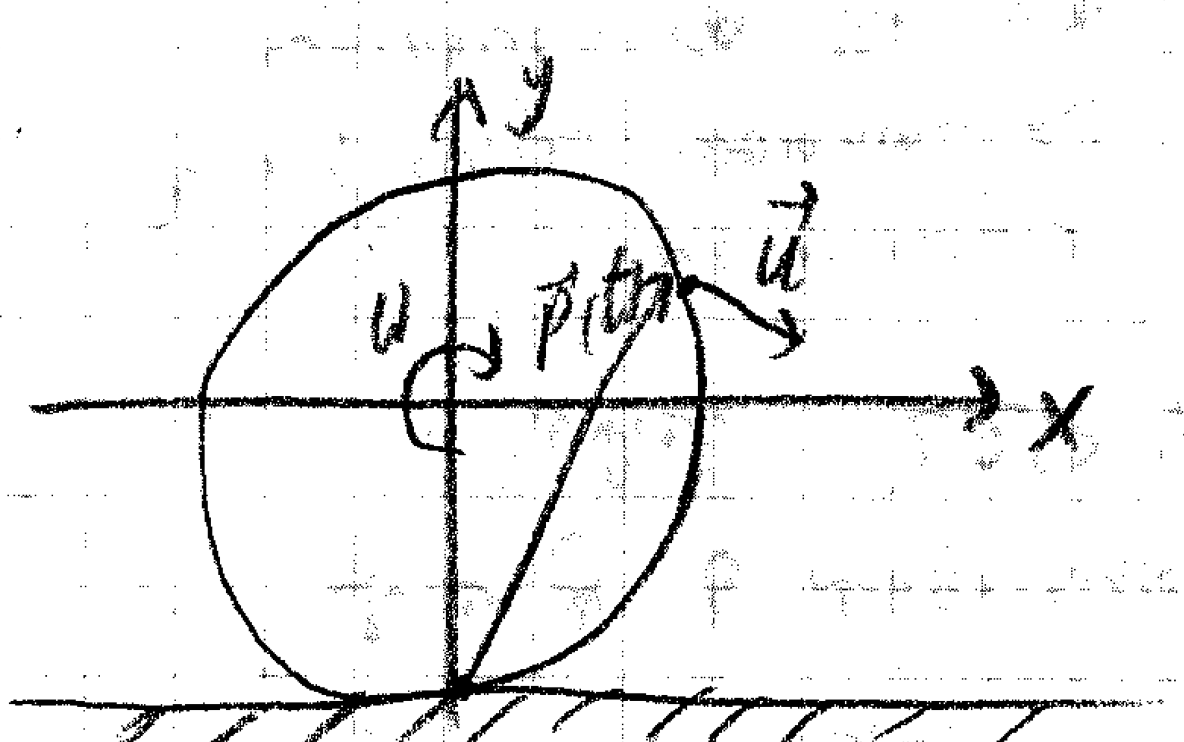
$$\theta_1=\arctg\left(\frac{V_0\sin\alpha-\frac{gd}{V_0\cos\alpha}}{-V_0\cos\alpha}\right)=tg^{-1}\left(-tg\alpha+\frac{gd}{V_0^2\cos^2\alpha}\right)$$

תרגיל:

גלגל ברדיוס R מתגלגל על מישור אופקי במהירות זוויתית קבועה ω.

א. הראו כי בכל רגע נתון t, וקטור המהירות של נקודה כלשהי P על היקף הגלגל והוקטור $\vec{p}(t)$, המחבר את הנקודה P אל נקודת המגע במשטח ניצבים.

ב. הראו שהוקטור $\vec{P}(t)$ מקיים $|\vec{u}|=\omega|\vec{P}(t)|$ כאשר $\vec{u}$ הוא וקטור המהירות של הנקודה.



פתרון: א. נבחר ראשית במרכז הגלגל.

$$\vec{r}=R\cos\theta\hat{x}-R\sin\theta\hat{y}\qquad,\ \theta=\omega t$$

$$\vec{u}=\omega R\hat{x}+\dot{\vec{r}}=(\omega R-\omega R\sin\omega t)\hat{x}-\omega R\cos\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{P}(t)=R\hat{y}+\vec{r}=(R\cos\omega t)\hat{x}+(R-R\sin\omega t)\hat{y}$$

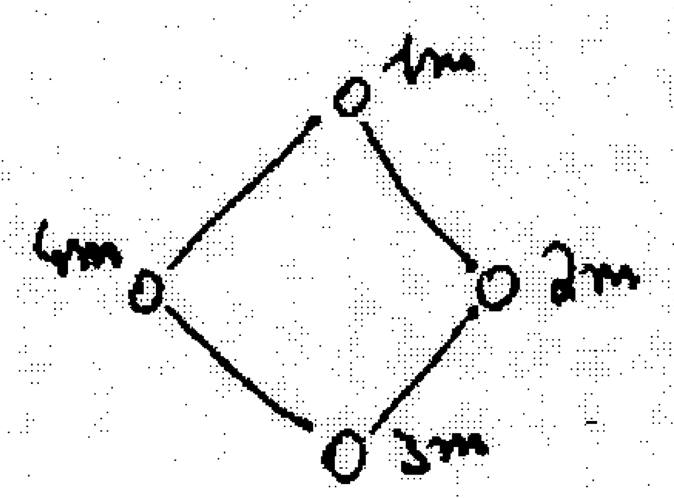
$$\vec{u}\cdot\vec{P}=\omega(R-R\sin\omega t)(R\cos\omega t)+\omega(-R\cos\omega t)(R-R\sin\omega t)=0$$

ב.

$$|\vec{u}|=\omega\sqrt{(R-R\sin\omega t)^2+(R\cos\omega t)^2}=\omega|\vec{P}(t)|$$

(VII) 6

ריבוע מורכב ממוטות חסרי מסה באורך a. הריבוע המונח בזווית 45° לאופק. בכל אחד מקודקודי הריבוע מונחת משקולת. היכן נמצא מרכז המסה המערכת יחסית למרכז הריבוע?



$$\vec{R} = \langle \vec{r} \rangle = \frac{\sum_n \vec{r}_n m_n}{\sum_n m_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_n x_n m_n}{\sum_n m_n} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_n y_n m_n}{\sum_n m_n}$$

לצורך נוחות ניקח את ראשית הצירים במרכז הריבוע:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} = \frac{+2m\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}4m}{2m+4m} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2m}{6m}\right) = -\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_n y_n m_n}{\sum_n m_n} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}m - \frac{a}{\sqrt{2}}3m}{1m+3m} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2m}{4m}\right) = -\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \vec{r} \rangle = \left(-\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

הערה: ניתן לקחת את ראשית הצירים על המסה 3m של הקואורדינטה היא למעשה. בחירת מערכת הצירים חשובה.

תרגיל

תנועתו של חלקיק מתוארת ע"י $\dot{\theta} = w = const.$; $r = r_0 e^{\beta t}$.

א. חשבו את וקטורי המהירות והתאוצה של החלקיק.

ב. מהו התנאי שהתאוצה הרדיאלית תתאפס.

פתרון:

א. נוסחאות לקורדינטות פולריות:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \dot{\theta} r \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

נחשב אפוא:

$$\dot{r} = \beta r_0 e^{\beta t} \quad , \dot{\theta} = w \quad , \theta = wt + c$$

$$\ddot{r} = \beta^2 r_0 e^{\beta t} \quad , \ddot{\theta} = 0$$

נציב בנוסחה:

$$\vec{v} = \beta r_0 e^{\beta t}\hat{r} + w r_0 e^{\beta t}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\beta^2 r_0 e^{\beta t} - r_0 e^{\beta t} w^2)\hat{r} + (2 r_0 \beta e^{\beta t} w)\hat{\theta}$$

ב. התאוצה הרדיאלית היא רכיב התאוצה בכיוון $\hat{r}$. התנאי להתאפסותה:

$$\beta^2 r_0 e^{\beta t} - r_0 e^{\beta t} w^2 = 0 \Longrightarrow \beta = w$$