

## פתרון תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. חישוב גבולות של סדרות מתבצע בנפרד לרכיב ממשי ומדומה ולכן זו שאלה קלה

$$z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2}i \quad (\text{א})$$

כמובן שהסדרה מתכנסת ל  $-\frac{1}{2}$

(ב)  $z_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + n \sin \frac{1}{n}i$   
 החלק המדומה מתכנס ל 1 והחלק הממשי חסום ומתבדר ולכן הסדרה מתבדרת.

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[n]{3^n + 4^n}i \quad (\text{ג})$$

כמובן שהסדרה מתכנסת ל  $e^{-2} + 4i$

(ד)  $z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$   
 זה שווה ל  $\cos \frac{\pi n}{3} + i \sin \frac{\pi n}{3}$  גם החלק הממשי וגם החלק המדומה חסומים ומתבדרים ולכן הסדרה מתבדרת.

2. כתבו את הפונקציה הבאה באמצעות משתנה  $z$  (בלבד, בלי  $\bar{z}$  או  $|z|$  וכדומה).

$$x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

פתרון: קל לבדוק שזה שווה ל

$$x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = x + iy - \frac{x - iy}{|z|^2} = z - \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z - \frac{1}{z}$$

3. הגדירו את הפונקציה

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z-2}$$

בנקודה  $z = 2$  כך שתהיה רציפה שם.  
 פתרון: קל לראות שלמעט בנקודה  $z = 2$  מתקיים

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z-2} = \frac{2-z}{2z} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2z}$$

$$f(2) = -\frac{1}{4}$$

ולכן יש להגדיר

4. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה  $z = 0$  ומצאו אותו אם הוא קיים:

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \quad (\text{א})$$

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2 - z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - 2ixy - y^2 - (x^2 + 2ixy - y^2)}{x^2 + y^2} = -i \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

לפי כלים של אינפי 3, זה לא מתכנס (למשל מתקדמים לאורך  $y = 0$  ולאורך  $x = y$ )

$$\frac{z \operatorname{Re}(z)}{\bar{z}} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{z \operatorname{Re}(z)}{\bar{z}} = \frac{z^2 \operatorname{Re}(z)}{z\bar{z}} = \frac{(x^2 + 2ixy - y^2)x}{x^2 + y^2} = \frac{x^3}{x^2 + y^2} - \frac{y^2x}{x^2 + y^2} + 2i \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

נעבור חלק חלק ונראה שכולם מתכנסים (ל 0 כמובן) באמצעות שיטות של אינפי  
3

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| = |x| \rightarrow 0$$

$$\left| \frac{y^2x}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{y^2x}{2xy} \right| = \left| \frac{y}{2} \right| \rightarrow 0$$

ובדומה החלק השלישי ולכן הפונקציה מתכנסת ל 0.

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}} = \frac{y}{x - iy} = \frac{xy + iy^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} + i \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

החלק הממשי והמדומה מתבדרים ולכן הגבול לא קיים.