פתרון תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נזכור שאם f שלמה אז בוודאי שf'' שלמה. לכן, לפי משפט היחידות

$$f''(z) + f(z) = 0$$

זאת משוואה דיפרנציאלית שפתרונה:

$$f(z) = c_1 e^{iz} + c_2 e^{-iz}$$

2. צריך כאן קצת זהירות עם התחומים. נגדיר $D = \{z \mid |z| < 1\}$. (שהיא פתוחה, בשונה מהתחום המקורי שלנו). נגדיר

$$E_i = \{z \mid |z| \le \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$$

לפי הנתון, ברור ש

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{z \mid |z| \le \frac{1}{2}\}$$

ולכן לפחות אחת מבין קבוצות אלו היא אינסופית. בלי הגבלת כלליות E_1 היא אינסופית. E_1 היא קבוצה אינסופית וחסומה, ולכן לפי בולצאנו ווירשטראס יש לה נקודת הצטברות, נניח p. ברור ש $p \in D$ (למעשה $p \in \{z \mid |z| \le \frac{1}{2}\}$ כי זאת קבוצה סגורה) וגם $E_1 \subseteq D$ ו D קבוצה פתוחה. אז בעצם f_1 מתאפסת על E_1 שהיא קבוצה ב D עם נקודת הצטברות ב D ולכן

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

(הערה: כל הבלאגן למעלה בא כדי שיהיו לנו בדיוק התנאים הדרושים למשפט היחידות, נשים לב שצריך ש f תהיה מוגדרת על תחום (A אינו תחום) ושנקודת ההצטברות תהיה בD (והרי D קבוצה פתוחה ולכן לא מכילה כל נקודת הצטברות שלה) ובגלל זה היינו זהירים קצת עם הבניה שלנו.)
בזה עוד לא סיימנו את התרגיל כי צריך להוכיח

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in A$$

אבל זה נובע מייד מרציפות f.

3. ראשית נשים לב שכל הפונקציות הקבועות מקיימות את הדרישה. אם $f(z)$ שלמה אבל לא קבועה, אז $f(\mathbb{C})$ היא קבוצה עם נקודת הצטברות ב$\mathbb{C}$. (ראינו בתרגול ש $f(\mathbb{C})$ צפופה ב $\mathbb{C}$ ולכן כל נקודה היא נקודת הצטברות של $f(\mathbb{C})$) אבל לפי הנתון, לכל $a \in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(a) = a$ ולכן לפי משפט היחידות $f(z) = z$. כמו כן, $f(z) = z$ באמת מקיימת את התנאי. לסיכום הפונקציות שמקיימות את התנאי הנ"ל הן בדיוק הפונקציות הקבועות ו $f(z) = z$.

4. אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר,אם נגדיר $g(z) = z^2 - z$ אז יתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$f(1 - \frac{1}{n}) = g(1 - \frac{1}{n})$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z) = z^2 - z$$

בכל התחום המדובר.

5. נכתוב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3yi + 2 \\ &= x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x-3)y \end{aligned}$$

אנחנו מחפשים למעשה מקסימום של הפונקציה

$$|f(z)| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2}$$

לשמחתנו פונקציה זו מקבלת מקסימום בדיוק איפה שהפונקציה

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2$$

מקבלת מקסימום מה שמביא אותנו לביטוי טיפה יותר נחמד.
אנחנו כמובן יודעים בוודאות שהמקסימום קיים כי כל הפונקציות רציפות על קבוצה סגורה וחסומה
לפי עקרון המקסימום,ידוע שמקסימום מתקבל בנקודה שנמצאת על שפת המעגל,דהיינו בנקודה שמקיימת $y^2 = 1 - x^2$. נציב גם את האינפורמציה הזאת ונקבל שמחפשים מקסימום עבור

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2(1-x^2) \\ &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (4x^2 - 12x + 9)(1 - x^2) \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום של

$$f(x) = 8x^2 - 18x + 10$$

אבל נשים לב שאנחנו חיים בקטע $[-1, 1]$ (אלה הערכים האפשריים של x). נגזור ונקבל

$$f'(x) = 16x - 18$$

כלומר הפונקציה יורדת לאורך כל תחום ההגדרה ולכן המקסימום יהיה בנקודה $x = -1$ כלומר מקסימום יתקבל בנקודה $z = -1$

6. נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.

7. נניח ש $f(z)$ פונקציה שלמה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n^n}$$

הוכיחו ש $f(z) = 0$. רמז: הוכיחו כי $z = 0$ הוא אפס ומצאו את הסדר שלו.
ראשית נשים לב שמרציפות f ברור ש

$$|f(0)| = |f \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}| \leq \lim_{n\to\infty} |f(\frac{1}{n})| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

כלומר $f(0) = 0$ כלומר $z = 0$ הוא אפס. נניח שהוא אפס מסדר k, כלומר

$$f(z) = z^k g(z)$$

כאשר $g(z)$ אנליטית ו $g(0) \neq 0$. אבל אז

$$|g(0)| = |g(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})| = \lim_{n\to\infty} |g(\frac{1}{n})| = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^k}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^n} = 0$$

בסתירה. ולכן $z = 0$ הוא אפס מסדר אינסוף ולכן $f(z) = 0$ כי לפונקציה אנליטית שאינה 0 אין אפסים מסדר אינסוף.