מבנים דיסקרטיים – תרגול 9:

תת-חבורות נורמליות

הגדרה: תהי G חבורה ו $H \le G$. אז H נקראת **תת חבורה נורמלית** של G (והיא תסומן ע"י $H \lhd G$) אם לכל $g \in G$ ולכל $h \in H$ מתקיים $ghg^{-1} \in H$.

דוגמאות:

1. כל ת"ח של חבורה אבלית היא נורמלית. $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1} = b$ ולכן קל להראות שתנאי 4 מתקיים.
2. לכל חבורה G נגדיר את **המרכז** של G להיות:

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G \qquad gx = xg\}$$

(כלומר המרכז היא קבוצת כל האיברים G שמתחלפים עם כל אברי G).

מראים כמו בדוגמא 1 ש $Z(G) \lhd G$.

3. לא כל ת"ח היא נורמלית. לדוגמא: $G = S_3$, תהי $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. קל לראות ש $\pi^2 = id$ ולכן $o(\pi) = 2$, כלומר $H := <\pi> = \{id, \pi\}$.

טענה: H לא תת חבורה נורמלית של G.

הוכחה: תהי $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in G$. שוב מתקיים $\sigma^2 = id$ ולכן $\sigma = \sigma^{-1}$ ולכן $\sigma\pi\sigma^{-1} = \sigma\pi\sigma$.

נחשב את ערכי $\sigma\pi\sigma$: $\sigma\pi\sigma(1) = 3, \sigma\pi\sigma(2) = 2, \sigma\pi\sigma(3) = 1$. כלומר $\sigma\pi\sigma^{-1} = \sigma\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \notin H$. ולכן H לא תת חבורה נורמלית של G (כי לא מתקיים קריטריון הנורמליות).

4. איך "דרדסנו" את דוגמא 3? בחרנו חבורה לא אבלית G, לקחנו איבר $\pi \in G$ מסדר 2. נשים לב שאם $<\pi>$ היא נורמלית, אזי לכל $g \in G$ מתקיים $g\pi g^{-1} \in <\pi> = \{e, \pi\}$ אבל אז בהכרח $g\pi g^{-1} = \pi$, כי אם $g\pi g^{-1} = e$ אזי נכפול משמאל ב g^{-1} ומימין ב g ונקבל $\pi = e$ בסתירה לכך שהוא מסדר 2. לכן קיבלנו ש $g\pi g^{-1} = \pi \Rightarrow g\pi = \pi g$ לכל $g \in G$. כלומר $\pi \in Z(G)$. לכן כדי למצוא דוגמא לת"ח לא נורמלית מסדר 2, מספיק לקחת איבר $\pi \notin Z(G)$.
5. מצאו תת-חבורה לא נורמלית של $GL_2(\mathbb{Q})$. נקח $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ואז לפי ההסבר ב 2, מספיק להראות ש A לא במרכז החבורה.
6. מצאו תת-חבורה נורמלית של $GL_n(\mathbb{R})$: נקח את $SL_n(\mathbb{R})$ קבוצת המטריצות עם דטרמיננטה 1. זוהי תת-חבורה, ומתקיים $\left|ghg^{-1}\right| = |g||h|\left|g^{-1}\right| = |g||h||g|^{-1} = |g||g|^{-1}|h| = |h|$.

<u>חוגים:</u>

הגדרה:

חוג הוא שלשה הכוללת קבוצה ושתי פעולות בינאריות "חיבור" ו"כפל" $\left(R,+,\cdot\right)$, כך ש

1. $\left(R,+\right)$ זו חבורה אבלית. איבר היחידה מסומן ב0.
2. $\left(R^*,\cdot\right)$ זו חבורה למחצה. [$R^* = R \setminus \{0\}$]
3. מתקיים חוק הפילוג $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$.

חוגים מיוחדים:

- "חוג קומוטטיבי" אם $\left(R^*,\cdot\right)$ היא אבלית.
- "חוג עם יחידה" אם $\left(R^*,\cdot\right)$ היא מונויד. במקרה זה איבר היחידה מסומנן ב1.
- "חוג עם חילוק" אם $\left(R^*,\cdot\right)$ היא חבורה. במקרה זה, ההפכי של a לפעולת הכפל מסומן בa^{-1}.
- "שדה" אם $\left(R^*,\cdot\right)$ היא חבורה אבלית.

דוגמאות:

$\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_n$

אם R חוג קומוטטיבי אזי $R[x]$ (הפולינומים עם מקדמים ב R) הוא חוג.

תרגיל: תהי X קבוצה, ו $P(X)$ קבוצת החזקה שלה. נגדיר על $P(X)$ את הפעולות

$$A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$$A\cdot B=A\cap B$$

הראו שזהו חוג חילופי עם יחידה, ומתקיים $AA=A, A+A=0$.

תרגיל: יהי R חוג, הוכיחו כי $(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2$.

פתרון: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=aa+ba+ab+bb$.

הגדרות:

יהי חוג R. המרכז שלו מסומן ב$Z(R)=\{y\in R: xy=yx\forall x\in R\}$.

תרגיל: $Z(R)$ הוא חוג. אם R חוג עם יחידה אזי $Z(R)$ הוא חוג עם יחידה.

תרגיל:

א. $-(-a)=a,-(a+b)=-a-b$

ב. $a(-b)=-(ab)=(-a)b,\ \ (-a)(-b)=ab$

ג. $(-a)^2=a^2$

אם R חוג עם יחידה, אזי:

ד. $(-1)a=-a$

ה. $(-1)^2=1$

ו. $-1\in Z(R)$

תרגיל: הראו שאם $x^2=x$ לכל איבר בחוג, אזי החוג קומוטטיבי.

פתרון:

$$a+b=(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b$$
$$\Rightarrow ab+ba=0\Rightarrow$$
$$ab=-(ba)=(-(ba))^2=(ba)^2=ba$$