מתמטיקה בדידה – תרגיל 3

1. נניח $\mathbb{Z}$ קבוצה של מספרים שלמים. אזי ניקח: $\mathbb{Z} \supseteq A = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z} \supseteq B = \{2m+3 \mid m \in \mathbb{Z}\}$. הוכיחו: $A = B$.

הוכחה:

1) נניח $x \in A$ <= $x = 2m+1$ <= $x = 2(m-1)+3$, $m \in \mathbb{Z}$ ו- $\mathbb{Z} \ni n = m-1$ <= $x = 2n+3$ <= $x \in B$.

2) נניח $x \in B$ <= $x = 2m+3$ <= $x = 2(m+1)+1$, $m \in \mathbb{Z}$ ו- $\mathbb{Z} \ni n = m+1$ <= $x = 2n+1$ <= $x \in A$. □

2. הוכיחו (לפי ההגדרה): $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$

הוכחה: $x \in B$, צ"ל $x \in C$.

$x \in B$ <= קיימים שני מקרים: (1) $x \in B$ ו- $x \in A$ **או** (2) $x \in B$ ו- $x \notin A$.

(1). $x \notin A \setminus B$ ו- $x \notin B \setminus A$ <= $x \notin A \triangle B$ <= $x \notin A \triangle C$ <= $x \in C$

(2). $x \in B \setminus A$ <= $x \in A \triangle B$ <= $x \in A \triangle C$ <= $x \in C$

דרך נוספת: $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C) \Rightarrow (A \triangle A) \triangle B = (A \triangle A) \triangle C \Rightarrow B = C$

3. פשטו את הביטוי תוך שימוש בחוקי פעולות מעל הקבוצות: $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap B)$.

פתרון:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap B) \qquad (*)$$

$(X) \cup (Y \cap Z) \cup (A^C \cap B)$ <= לפי חוק הפילוג $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, כלומר:

$$(*) = \big((A \cap B) \cup (A \cap B)\big) \cap \big((A \cap B) \cup (C^C \cap D)\big) \cup (A^C \cap B) = (A \cap B) \cap \big((A \cap B) \cup (C^C \cap D)\big) \cup (A^C \cap B) =$$

(==-- כיוון ש $(A \cap B) \subseteq \big((A \cap B) \cup (C^C \cap D)\big)$, $(A \cap B) \cap \big((A \cap B) \cup (C^C \cap D)\big) = (A \cap B)$ --==)

$$\ldots = (A \cap B) \cup (A^C \cap B) = (A \cup A^C) \cap B = \mathbf{U} \cap B = B$$

4. הוכיחו על ידי שימוש בחוקי פעולות על הקבוצות: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(הגדרה נוספת ל- $A \triangle B$)

הוכחה:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) =_{(distr.law)} = \big((A \cap B^C) \cup B\big) \cap \big((A \cap B^C) \cup A^C\big) =_{(distr.law)} =$$

$$= \big((A \cup B) \cap \mathbf{U}\big) \cap \big(\mathbf{U} \cap (B^C \cup A^C)\big) = (A \cup B) \cap (B^C \cup A^C) =_{(de-morgan)} = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C =$$

$$=_{(A \setminus B = A \cap B^C)} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

5. הראו כי: $A \cap B = \varnothing \iff A \triangle B = A \cup B$

הוכחה: כיוון (<=): $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \triangle B \Rightarrow \begin{matrix} x \in A, x \notin B \\ x \notin A, x \in B \end{matrix} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

כיוון (<=):

$$A \triangle B=\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=_{(distr.law)}=$$
$$=\left((A\cap B^C)\cup B\right)\cap\left((A\cap B^C)\cup A^C\right)=_{(distr.law)}=$$
$$=\left((A\cup B)\cap(B^C\cup B)\right)\cap\left((A\cup A^C)\cap(A^C\cup B^C)\right)=$$
$$=\left((A\cup B)\cap\mathbf{U}\right)\cap\left(\mathbf{U}\cap(A^C\cup B^C)\right)=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=_{(de-morgan.law)}=$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=_{(A\cap B=\varnothing)}=(A\cup B)\cap\mathbf{U}=A\cup B$$

6. תהיי X קבוצה. R נקרא חוג מעל X אם מתקיים:

א. $R\subseteq P(X)$

ב. $\varnothing\in R$

ג. $\forall A,B\in R$ מתקיים $\left(A\setminus B\in R\right)\wedge\left(A\cup B\in R\right)$.

הוכיחו ש $\forall A,B\in R$ מתקיים $A\cap B\in R$.

<u>**פתרון**</u>:

נוכיח שלכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\cup B)\setminus(A\cap B))$

$$(A\cup B)\setminus((A\cup B)\setminus(A\cap B))=(A\cup B)\cap((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)^c=$$
$$=(A\cup B)\cap((A\cup B)^c\cup(A\cap B))=$$
$$=((A\cup B)\cap((A\cup B)^c)\cup((A\cup B)\cap(A\cap B))=A\cap B$$

השוויון הראשון: הוכחנו בתרגול ש $A\setminus B=A\cap B^c$.

השוויון השני: דה-מורגן ומכיוון ש $(A^c)^c=A$

השוויון השלישי: דיסטריביוטיביות

השוויון הרביעי: מכיוון ש $A\cap A^c=\varnothing$. הוכחנו בתרגול שאם $A\subseteq B$ אז $A\cap B=A$ וש $A\cup\varnothing=A$ מכיוון ש $A\cap B\subseteq A\cup B$ נקבל את הדרוש.

כעת הוכחנו בתרגול ש $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

ולכן $A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$

נשאר להוכיח ש $A\cap B\in P(X)$. נתון ש $A\in R$ ז"א $A\in P(X)$ ז"א $A\subseteq X$. $A\cap B\subseteq A$ מטרנזטיביות ההכלה נקבל את הדרוש.

<u>**בהצלחה!**</u>