

פיסיקה למתמטיקאים

משוואות אויילר לגראנג': תנועה על פני חרוט

1. כדור בעל מסה m מאולץ לנוע על פני חרוט (ללא חיכוך). מיקומו בכל רגע נתון בקורדינטות גליליות ע"י (r, θ, z) .

(א) רשמו את הלגראנגיאן

תהי הזווית בין היוצר של החרוט לצירו, α . אזי $r = z \tan \alpha$ ונקבל

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 \tan^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \end{aligned} \quad (1)$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה. מהו קבוע התנועה ?

משוואות התנועה עבור z, θ בהתאמה הן

$$m\ddot{z}(\tan^2 \alpha + 1) = mz \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 - mg, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(mz^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}) = 0, \quad (3)$$

כאשר התנע הזוויתי

$$L = mz^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta} \quad (4)$$

קבוע.

(ג) מצאו את תדירות התנודות הקטנות ביחס לתנועה המעגלית עם רדיוס

r_0 .

מהצבת (4) ב (2) נקבל

$$\ddot{z} = \frac{L^2}{m^2 \tan^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha)} \frac{1}{z^3} - \frac{g}{(1 + \tan^2 \alpha)}, \quad (5)$$

נציב $z = r / \tan \alpha$ ב (5), נדרוש $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ ונקבל כי r_0 מקיים

$$L^2 / mr_0^3 = g / \tan \alpha. \quad (6)$$

כעת אם נציב ב (5) $r = r_0 + \delta$, נקבל יחד עם תנאי (6) אוסילטור הרמוני¹

$$(7) \quad \ddot{\delta} + \omega^2 \delta = 0$$

עם תדירות $\omega = \sqrt{3g \sin 2\alpha / 2r_0}$

¹ גם כאן השתמשנו בקירוב $1/(r_0 + \delta)^3 \approx (1 - 3\delta/r_0)/r_0^3$