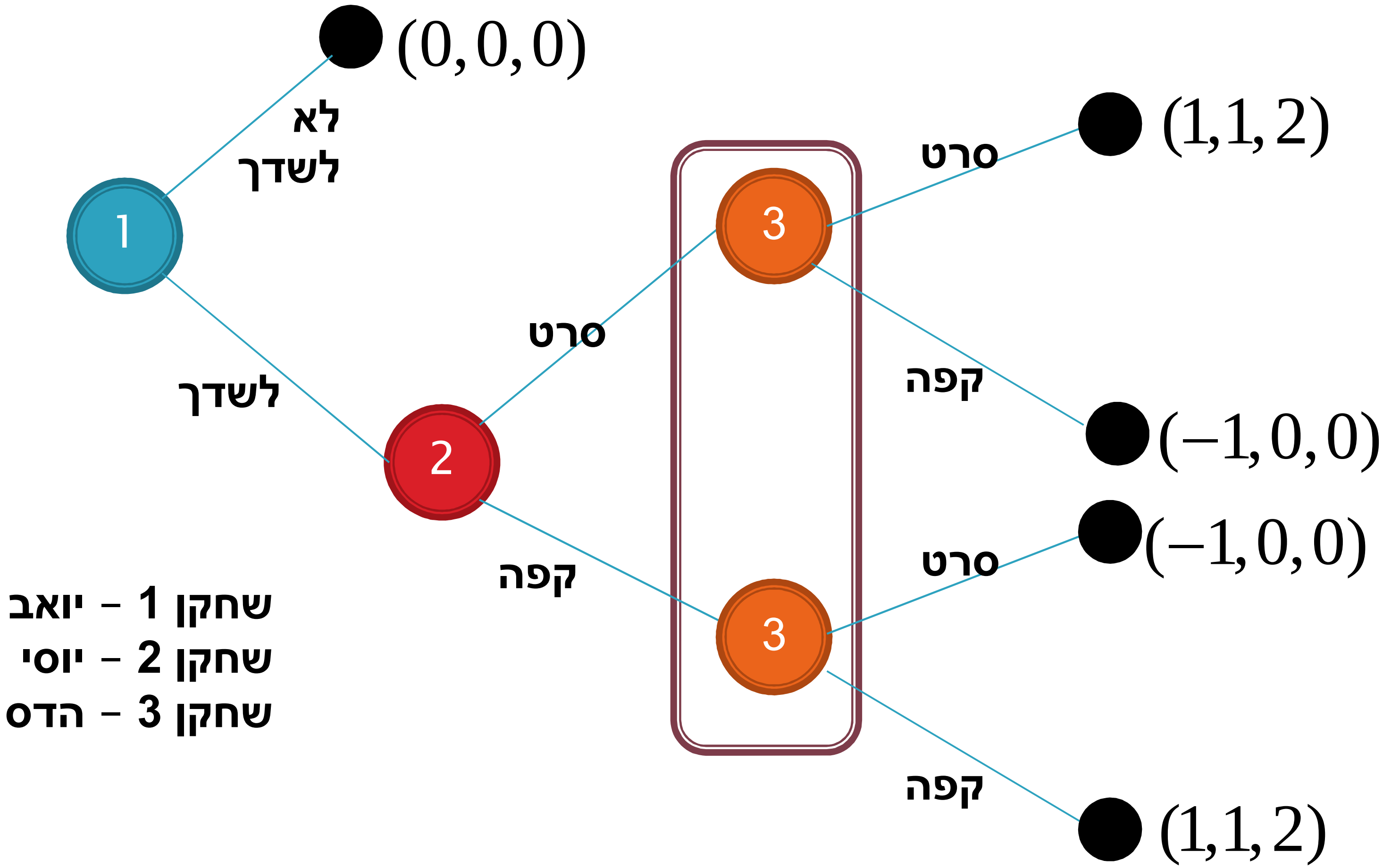
שיעור 13

משחקים בצורה רחבה ואסטרטגיות מעורבות
אסטרטגיות מעורבות עם מספר גדול (מ2) של אסטרטגיות
מהלכי גורל

משחק השידוכים

- יואב הוא שדכן מקצועי אך קצת מפוזר.
- יואב צריך להחליט האם לשדך בין יוסי להדס.
- אם הוא יחליט לנסות לשדך בין יוסי להדס, הוא יאמר להם שהפגישה תתקיים ביום שישי ה 13 בשבע בערב.
- הוא יודיע להם שהפגישה תתקיים בקופי בין **<u>או</u>** בקולנוע גת (לראות את הסרט האנגאובר 3), אך בגלל מפוזרותו הוא ישכח להודיע להם היכן תתקיים הפגישה לבסוף.
- יוסי והדס ינסו ללכת לפגישה בכל זאת, אך עליהם להחליט האם ללכת לסרט או לקפה (אין להם אפשרות תקשורת).
- יואב מממן את הפגישה ואם היא מוצלחת אזי הוא מקבל שכר (שעולה על עלות הפגישה).
- יוסי מעדיף ללכת לקפה ואילו הדס מעדיפה ללכת לסרט.



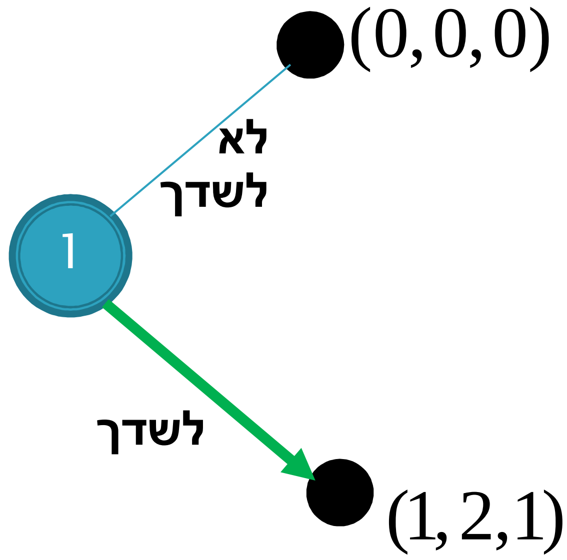
- ננתח את המשחק בעזרת אינדוקציה לאחור

- תת-המשחק שמתחיל ביוסי (שחקן 2) זהה למשחק מלחמת המינים משיעור 3.

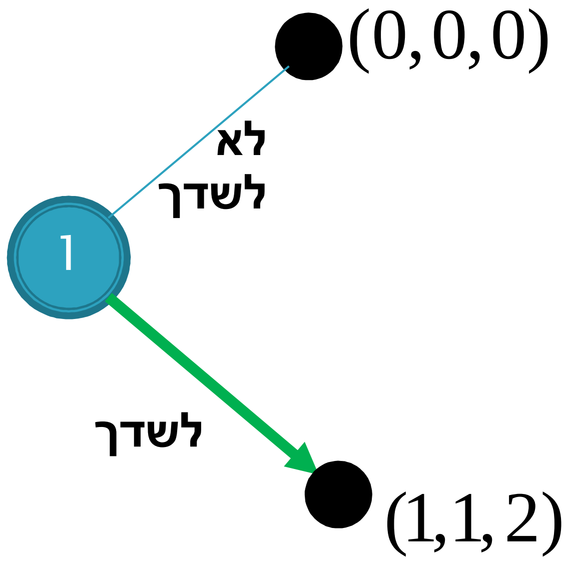
		הדס	
		סרט	קפה
יוסי	סרט	1,2	0,0
	קפה	0,0	2,1

- ישנם שני שיוויי משקל: (סרט,סרט) או (קפה,קפה).
- צריך לגלגל אחורה את העץ עבור כל אחד משיוויי המשקל האלה.

(קפה,קפה)



(סרט,סרט)



- קיבלנו שני שיווי משקל משוכללים:
- (סרט,סרט,לשדך) ו- (קפה,קפה,לשדך)
- אם כך נראה שעדיף ליואב לשדך.

ניתוח התוצאות

- האם באמת ניתוח המשחק שלנו אמין?
- הבעיה היא שיואב לא באמת יכול לסמוך על שיוויי המשקלים של תת-המשחק, כיוון שאין ליוסי והדס יכולת לתקשר ולתאם על אחד מהם.
- האם יש לנו דרך טובה יותר לחזות/לצפות מה סביר שיקרה במציאות?
- שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות יכול לחזות את התנהגות השחקנים.

שימוש באסטרטגיות מעורבות במשחק בצורה רחבה

- אם יש לנו תת-משחק אסטרטגי "ללא פתרון" במשחק בצורה רחבה, סביר להוסיף לתת-משחק זה אסטרטגיות מעורבות. משפט נאש יבטיח לנו שיווי משקל.
- ננתח את תת-המשחק של יוסי והדס לפי אסטרטגיות מעורבות.
- שיווי המשקל באסטרטגיות מעורבות יתן לנו הערכה להסתברויות בהן כל אחד מהשחקנים יבחר בקפה או סרט.
- נסמן ב p את ההסתברות שיוסי יבחר בסרט.
- נסמן ב q את ההסתברות שהדס תבחר בסרט.
- נזכיר שפונקציות התשלום החדשות מחשבות את תוחלת התשלום בבחירת ההסתברויות הנ"ל.

תזכורת: עקרון האדישות בשיווי משקל

- הוכחנו בשיעור 8 את המשפט הבא:
- **<u>משפט (עקרון האדישות):</u>** נניח שאסטרטגיה מעורבת p_i של שחקן i היא תגובה מיטבית של השחקן לצירוף האסטרטגיות p_{-i} של שאר השחקנים. אזי כל אסטרטגיה s_i המופיעה ב p_i עם הסתברות חיובית חייבת להיות גם כן תגובה מיטבית לצירוף p_{-i}.
- נניח שצירוף ההסתברויות (p^*, q^*) של יוסי והדס הוא שיווי משקל וגם $p^* \neq 0{,}1$.
- אזי לפי המשפט, התשלום ליוסי בשיווי המשקל שווה לתשלום באסטרטגיות הטהורות שלו: $(\text{קפה}, q^*), (\text{סרט}, q^*)$.

חישוב נקודת שיווי המשקל במשחק השידוכים

- נקבל את המשוואה הבאה: $u_1(\text{קפה}, q^*) = u_1(\text{סרט}, q^*)$.
- מכאן נקבל:
- $q^* \cdot u_1(\text{סרט}, \text{סרט}) + (1 - q^*)u_1(\text{קפה}, \text{סרט}) =$
  $= q^* \cdot u_1(\text{סרט}, \text{קפה}) + (1 - q^*)u_1(\text{קפה}, \text{קפה})$
- ולאחר הצבת התשלומים עבור האסטרטגיות הטהורות נקבל:
- $q^* \cdot 1 + (1 - q^*) \cdot 0 = q^* \cdot 0 + (1 - q^*) \cdot 2$
- $\Rightarrow q^* = \frac{2}{3}$

חישוב נקודת שיווי המשקל במשחק השידוכים

- החישוב מראה ששיווי המשקל מתקיים כאשר יוסי בוחר באסטרטגיה המעורבת $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}] = [\text{קפה},\text{סרט}]$ ואילו הדס תבחר באסטרטגיה המעורבת $[\frac{2}{3},\frac{1}{3}] = [\text{קפה},\text{סרט}]$.
- אם כך ההסתברות שנקבל את אחד משיוויי המשקל (קפה,קפה) או (סרט,סרט) היא: $\frac{4}{9} = 2\left(\frac{2}{3} * \frac{1}{3}\right)$.
- אם כך תוחלת התשלום של יואב היא

$$\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{5}{9}\cdot(-1)=-\frac{1}{9}$$

- אם כך לא כדאי ליואב לנסות לשדך בין יוסי להדס (ייתכן שהמצב היה שונה אילו היה בוחר בשני מעריצים של בראדלי קופר).

אסטרטגיות מעורבות – עם יותר משתי אסטרטגיות

- עד עתה ראינו חישוב שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות רק עבור משחקים בהם יש לכל שחקן רק 2 אסטרטגיות.
- איך מחשבים שיווי משקל במשחקים יותר מורכבים?
- למעשה ***משפט האדישות בשיווי משקל*** (שקף 8), מאפשר לנו לחשב את שיוויי המשקל גם במקרים היותר מורכבים, אך צריך לבדוק יותר מקרים.
- לדוגמה אם יש לשחקן 1 אסטרטגיות A,B,C, אזי אסטרטגיה מעורבת היא לבחור 3 הסתברויות $\bar{p} = [p_A, p_B, p_C]$ שסכומן 1.

אסטרטגיות מעורבות – עם יותר משתי אסטרטגיות

- אם $\bar{p}$ היא תגובה מיטבית לאסטרטגיה $\bar{q}$, אזי ישנן מספר אפשרויות עבור התשלומים ב A,B,C:
  - $\bar{p}$ היא אסטרטגיה טהורה.
- ב $\bar{p}$ יש שתי אסטרטגיות עם הסתברות שונה מאפס, לדוג' A,B, ואז בהכרח $u_1(A,\bar{q}) = u_1(B,\bar{q})$.
- ב $\bar{p}$ יש שלוש אסטרטגיות עם הסתברות שונה מאפס, ואז בהכרח $u_1(A,\bar{q}) = u_1(B,\bar{q}) = u_2(C,\bar{q})$.
- יחד עם המשוואה הנוספת $q_A + q_B + q_C = 1$ במשחקים רבים יהיה לנו מספיק מידע כדי למצוא את $\bar{q}$.

דוגמה: אבן, נייר ומספריים

	R	P	S
R	0	−1	1
P	1	0	−1
S	−1	1	0

- אבן (R) מנצחת מספריים (S) שמנצחים נייר (P) שמנצח אבן.
- תרגיל בית: בדקו שלמשחק זה אין שיווי משקל נאש.

משחק אנו"מ: מציאת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

- לפי משפט נאש, באסטרטגיות מעורבות יש למשחק אבן, נייר ומספריים שיווי משקל נאש.
- אם בשיווי משקל, באסטרטגיה המעורבת של שחקן 1 משתתפות כל האסטרטגיות, אזי לפי משפט האדישות, נקבל $u_1(S,\bar{q}) = u_1(P,\bar{q}) = u_1(R,\bar{q})$
- נקבל את המשוואות הבאות:
- $q_R u_1(R,R) + q_P u_1(R,P) + q_S(R,S) =$
  $q_R u_1(P,R) + q_P u_1(P,P) + q_S(P,S) =$
  $q_R u_1(S,R) + q_P u_1(S,P) + q_S(S,S)$

משחק אנו"מ: מציאת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

- לאחר הצבת הערכים המתאימים נקבל
- $q_R \cdot 0 + q_P \cdot (-1) + q_S \cdot 1 =$
$$q_R \cdot 1 + q_P \cdot 0 + q_S \cdot (-1) =$$
$$q_R \cdot (-1) + q_P \cdot 1 + q_S \cdot 0$$
- לאחר פישוט והעברת אגפים נקבל
- $-q_R - q_P + 2q_S = 0$
- $2q_R - q_P - q_S = 0$
- $q_R + q_P + q_S = 1$
- קיים פתרון יחיד למערכת והוא $\bar{q} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- כיוון שהמשחק סימטרי נקבל תוצאה זהה עבור $\bar{p}$.
- לכן קיים שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות והוא $(\bar{p}, \bar{q})$

משחק אנו"מ: מציאת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

- מצאנו שיווי משקל אחד, אך האם קיימים אחרים במשחק?
- נראה שלא.
- נבדוק את המקרה שבו ב $\bar{p}$ משתתפות שתי אסטרטגיות.
- בלי הגבלת כלליות, ניתן להניח ששתי האסטרטגיות האלה הן R,P (המשחק סימטרי).
- במקרה כזה ניתן להסיק שב $\bar{q}$ לא משתתפת האסטרטגיה R, כיוון שהיא נשלטת חזק ע"י P.
- לכן $p_S = q_R = 0$.
- לפי עקרון האדישות, נקבל $u_1(P,\bar{q}) = u_1(R,\bar{q})$.

משחק אנו"מ: מציאת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

- $u_1(R,\bar{q}) = u_1(P,\bar{q}) \Rightarrow$
- $q_P \cdot (-1) + q_S \cdot 1 =$
  $q_P \cdot 0 + q_S \cdot (-1)$
- יחד עם המשוואה $q_P + q_S = 1$ נקבל:
- $\bar{q} = \left[0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- כאשר רק שתיים מהאסטרטגיות משתתפות באסטרטגיה המעורבת, החישוב הנ"ל אינו מספיק!
- החישוב הנ"ל מוצא את האסטרטגיה המעורבת בה התשלומים של R,P הם שווים, אבל יש לוודא שבאסטרטגיה זו התשלום ב S הוא נמוך יותר, כדי לוודא ש $\bar{p}$ המתקבלת היא תגובה מיטבית!!!

משחק אנו"מ: מציאת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

- חישוב מראה ש $-\frac{1}{3}$ = $u_1(R,\bar{q}) = u_1(P,\bar{q})$ ואילו $u_1(S,\bar{q}) = 2/3$
- לכן נקבל ש $\bar{p}$ אינה תגובה מיטבית ל $\bar{q}$ ולכן אין שיווי משקל נאש בו משתתפות רק האסטרטגיות R,P.
- בצורה סימטרית ניתן להסיק שאף צירוף אחר של שתי אסטרטגיות לאף אחד משני השחקנים לא משתתף בשיווי משקל.
- תרגיל בית: פסלו את האפשרות שיש שיווי משקל בו לשחקן 1 יש אסטרטגיה טהורה ואילו לשחקן 2 יש אסטרטגיה מעורבת.

דוגמה: דילמת המתנדב

- קבוצת אנשים רואה אדם טובע בנהר.
- כל אחד מהאנשים יכול להחליט לקפוץ לנהר (ולקחת סיכון אישי). נניח כי אם יש לפחות קופץ אחד אז הטובע ניצל.
- נניח כי יש n אנשים.
- אם אף אחד לא קופץ, התועלת של כל האנשים היא 0.
- לכל אחד מהקופצים (המתנדבים) יש תועלת $V-C>0$.
- אם יש קופץ אחד לפחות, לכל מי שלא קפץ יש תועלת V.
- שיווי משקל באסטרטגיות טהורות הם: מתנדב אחד קופץ וכל השאר לא קופצים.
- הבעיה היא ששוב אין לאנשים דרך לתקשר ולתאם מראש מי מהם יקפוץ.

דוגמה: דילמת המתנדב

- נתאים לכל שחקן אסטרטגיה מעורבת p_i שהיא ההסתברות שהשחקן i יקפוץ למים.
- כיוון שהמשחק סימטרי, ולכל השחקנים אותה פונקצית תשלום, אנחנו נצפה ששיווי המשקל יתקיים כאשר כל ההסתברויות שוות.
- לכן ניתן להניח שכל האסטרטגיות המעורבות בשיווי המשקל הן $0 < p < 1$.
- לפי עיקרון האדישות: בשיווי משקל באסטרטגיות מעורבות, התשלום של שחקן זהה לתשלומים באסטרטגיות הטהורות שלו.

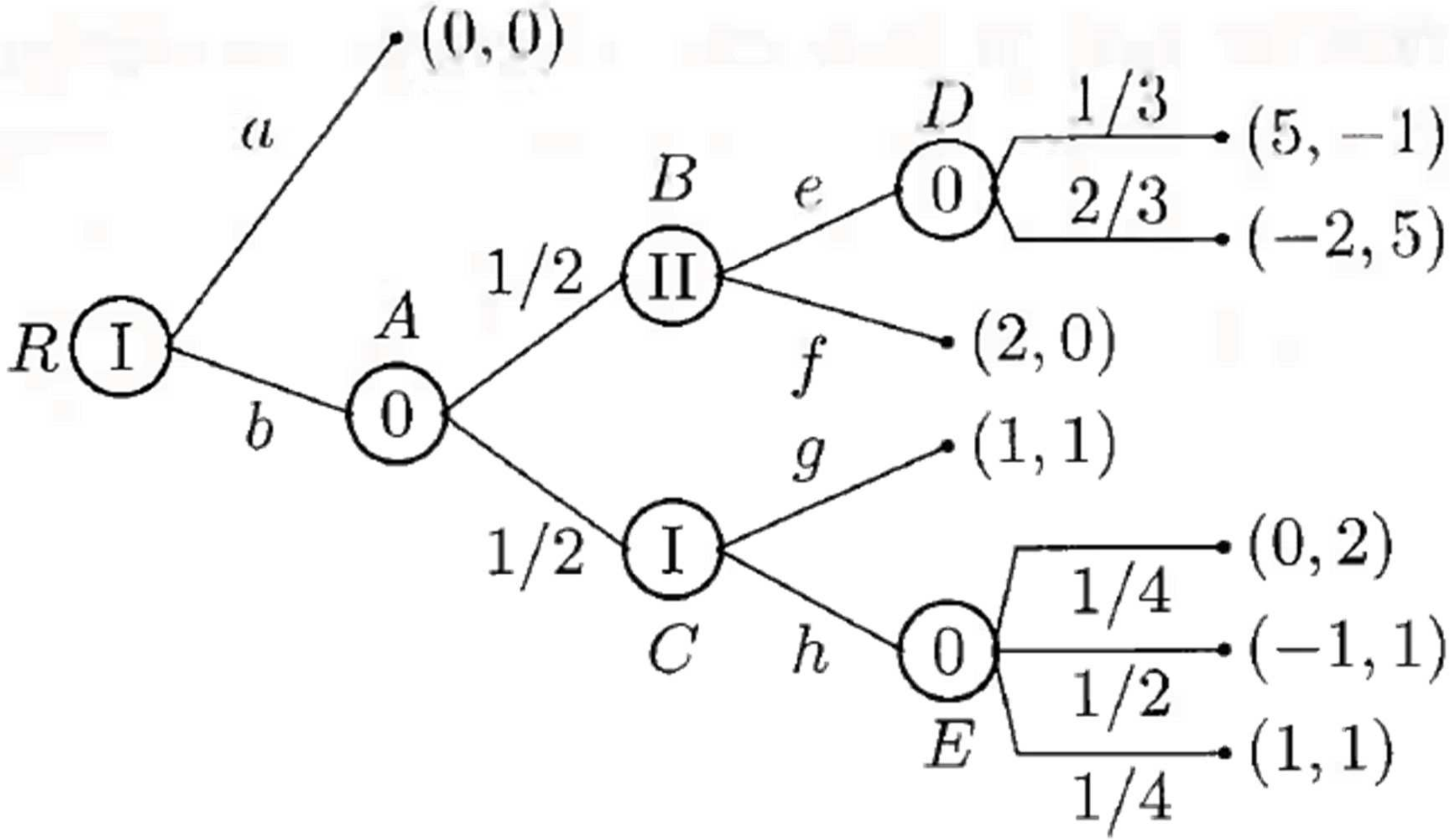
דוגמה: דילמת המתנדב

- $u_i(Stay, \bar{p}) = 0 \cdot (1-p)^{n-1} + V \cdot (1 - (1-p)^{n-1})$
- $u_i(Jump, \bar{p}) = V - C$
- נשווה בין התשלומים הנ"ל, ונקבל:
- $(1-p)^{n-1} = \frac{C}{V}$
- $\Rightarrow 1 - p = \left(\frac{C}{V}\right)^{\frac{1}{n-1}} \rightarrow 1$
- $\Rightarrow p \rightarrow 0$
- ההסתברות שאף אחד לא ייתנדב היא
- $(1-p)^n = (1-p)(1-p)^{n-1} = \frac{C}{V} \cdot \left(\frac{C}{V}\right)^{\frac{1}{n-1}} \rightarrow \frac{C}{V}$

משחקים בצורה רחבה עם מהלכי גורל

- רוצים לתאר בעזרת משחקים בצורה רחבה גם משחקים בהם יש "מהלכי גורל" כלומר מהלכים הסתברותיים או הגרלות.
- דוגמה למשחקים עם מהלכי גורל: שש-בש, מונופול, וכו'.
- דוגמה למשחקים שדורשים גם מהלכי גורל וגם קבוצות ידיעה: פוקר, בלקג'ק, וכו'.
- איך עושים זאת? מוסיפים שחקן 0 למשחק, אשר מהלכיו תלויים בהסתברויות.

דוגמה



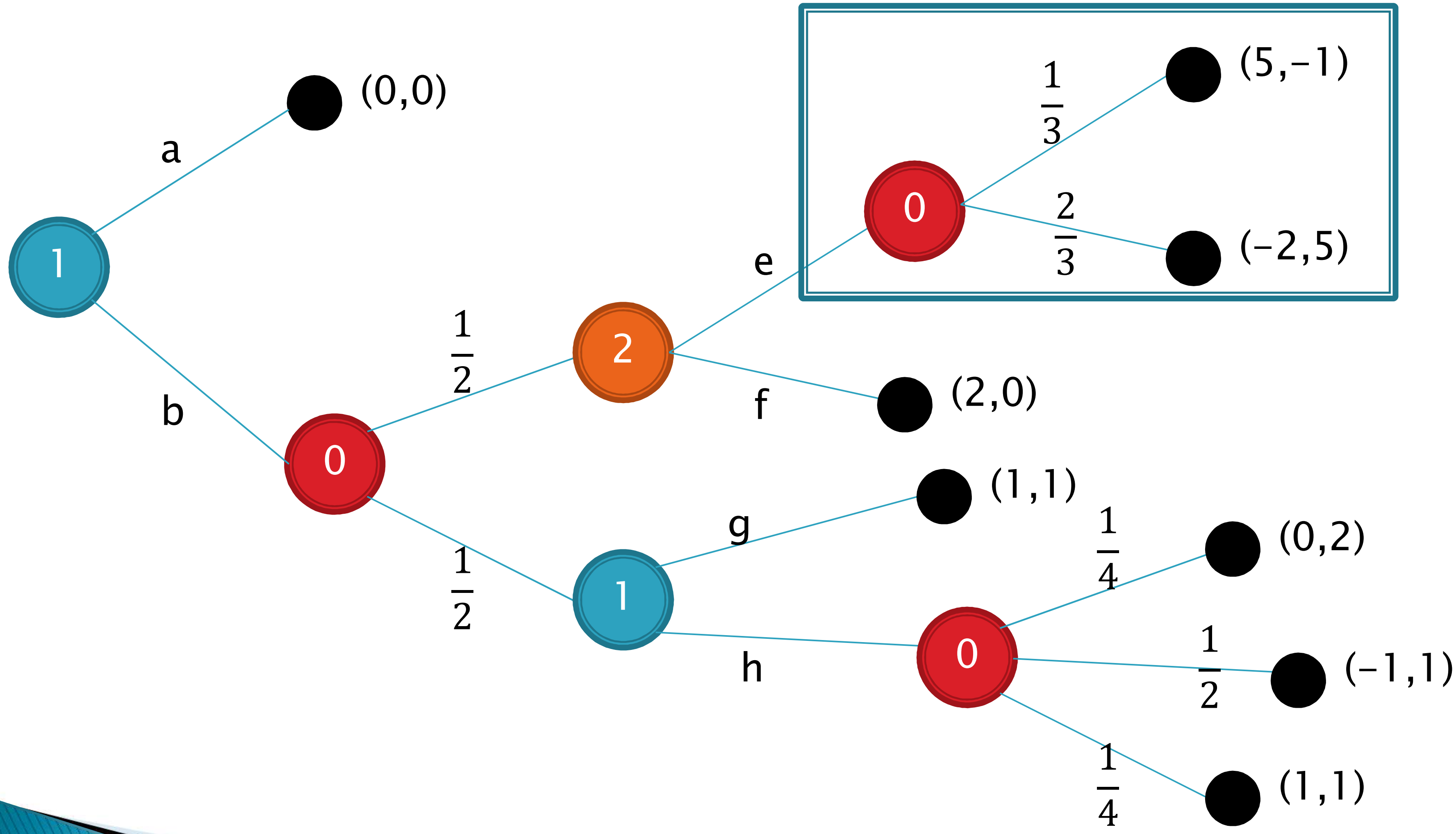
מהלכי גורל – פונקציות תשלום

- כיצד נקבעות פונקציות התשלום במשחקים בצורה רחבה עם מהלכי גורל?
- האסטרטגיות של השחקנים קובעות את תוצאת המשחק עד כדי ההגרלות שמתבצעות בתורות של שחקן 0.
- התשלומים ייקבעו בעזרת תוחלת התשלומים של כל ההגרלות.

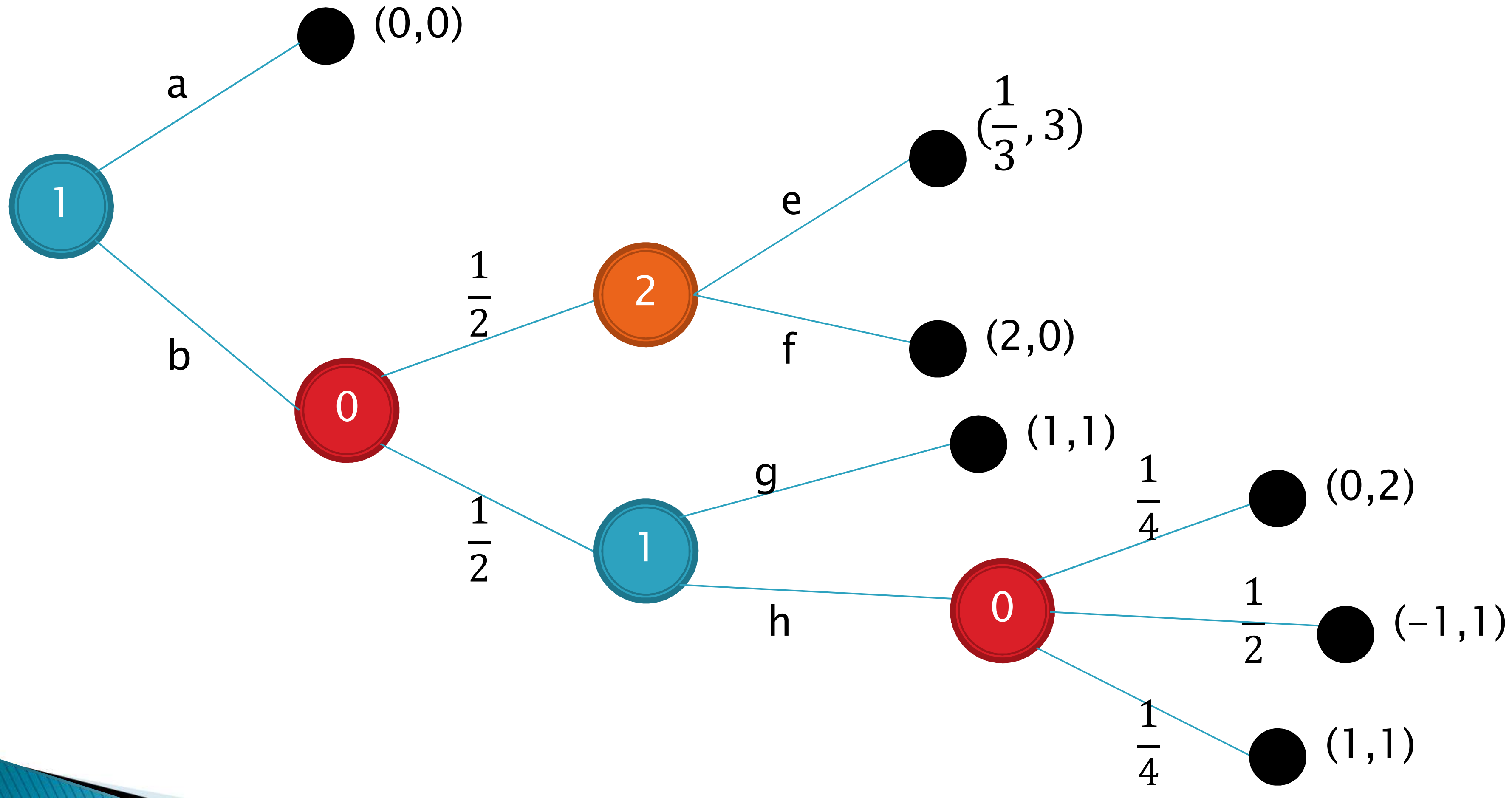
מהלכי גורל – פונקציות תשלום

- לדוגמה, אם האסטרטגיה של שחקן I היא $s_I = \{b, g\}$ והאסטרטגיה של שחקן II היא $s_{II} = \{f\}$, נקבל את התחרויות האפשריות הבאות (נרשום מסלולים בעזרת הקדקדים):
- R->A->B->(2,0)
- R->A->C->(1,1)
- אם כך התשלום לאסטרטגיות אלה יהיה:
- $u_I(s_I, s_{II}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$
- $u_{II}(s_I, s_{II}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

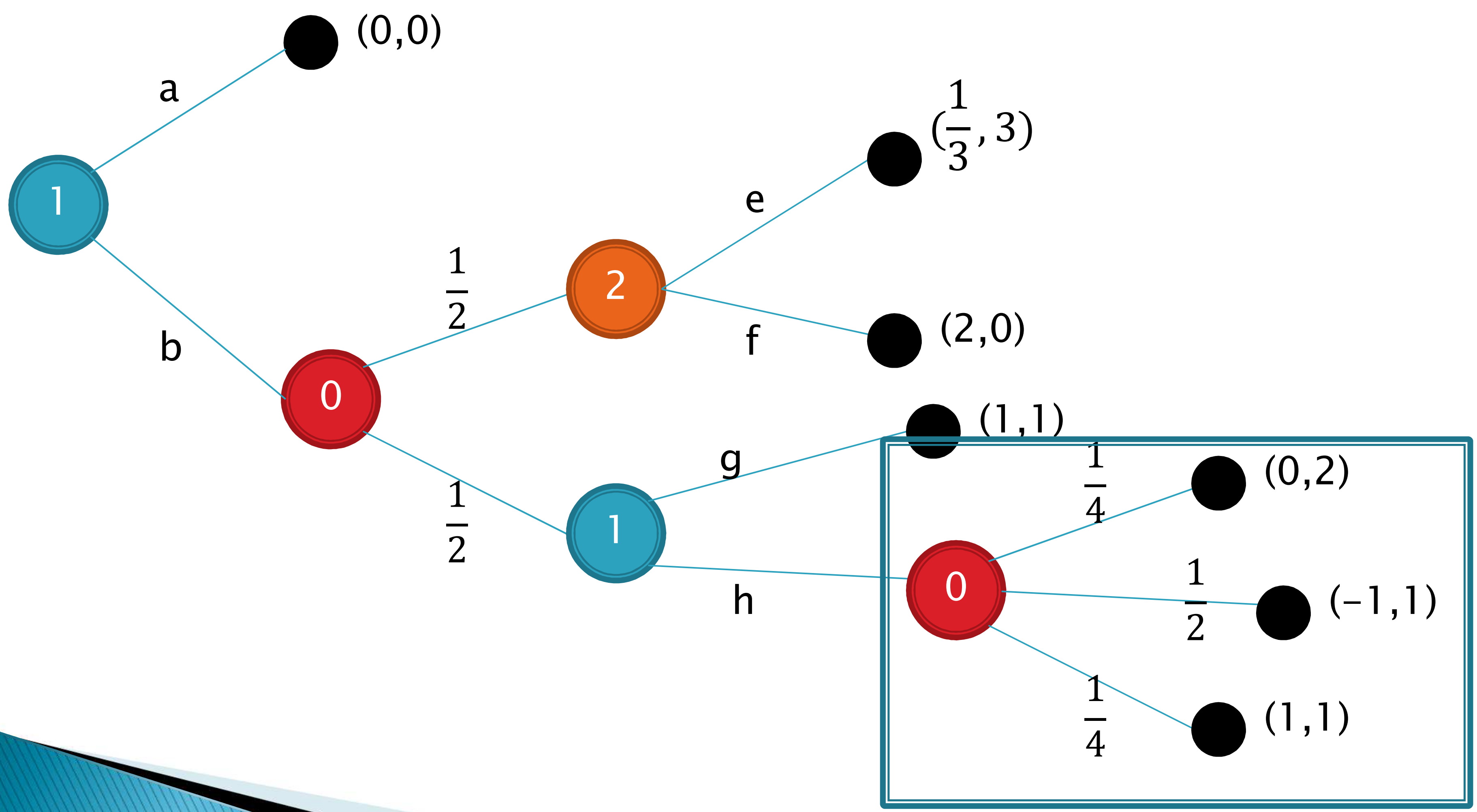
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



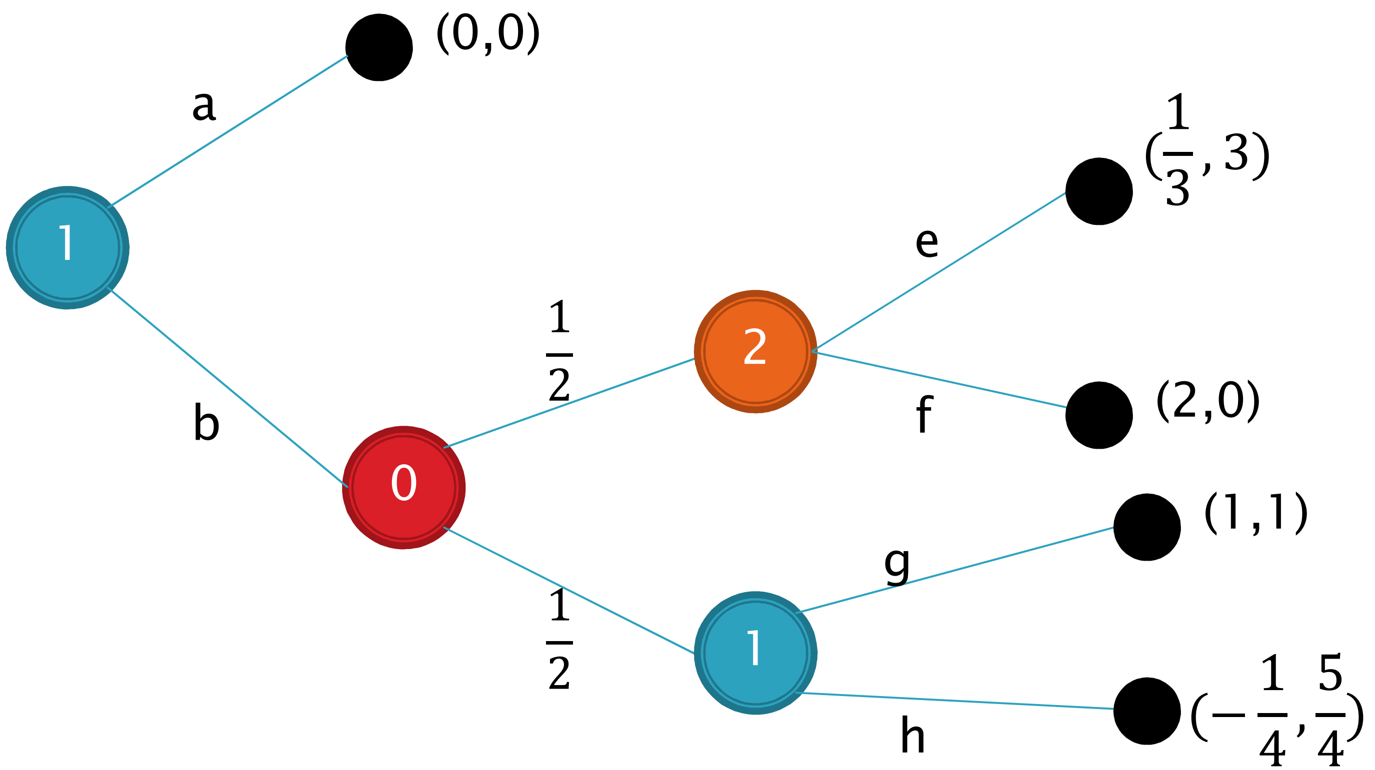
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



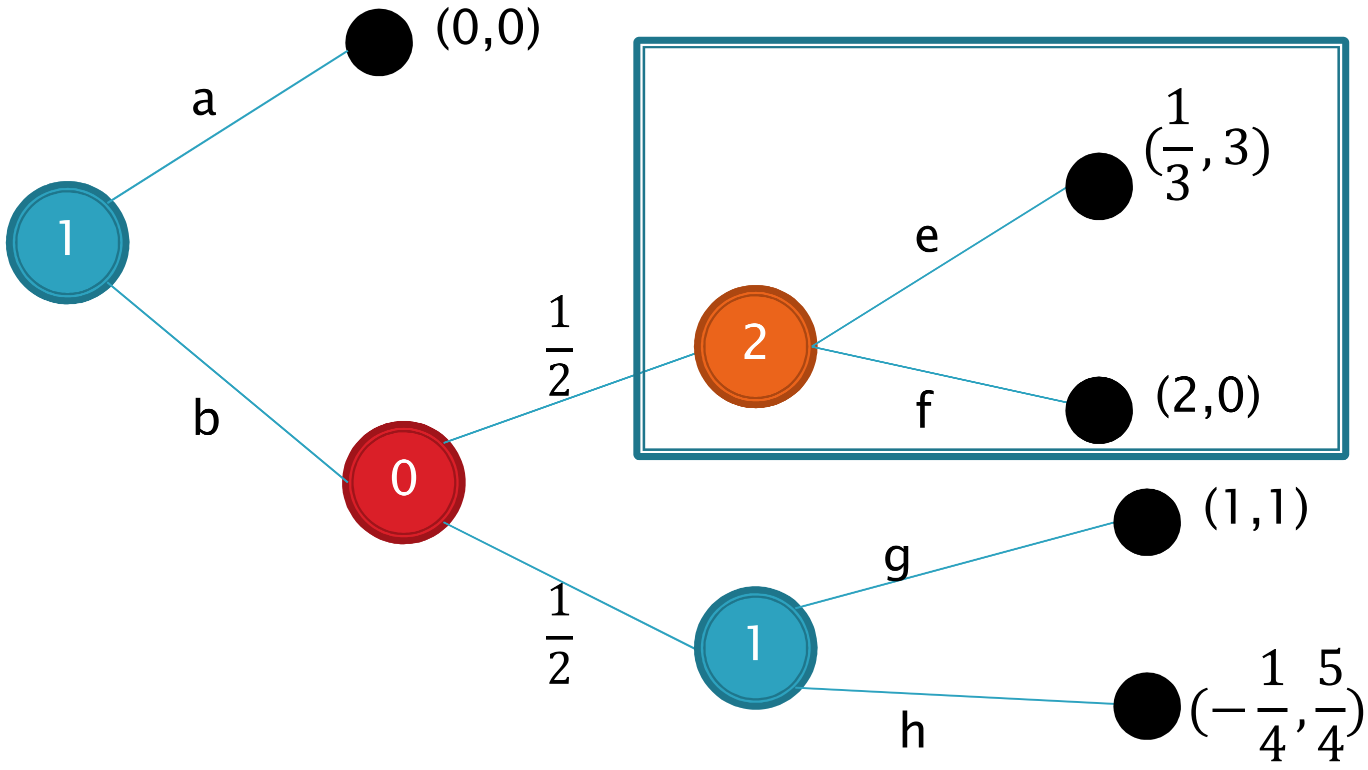
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



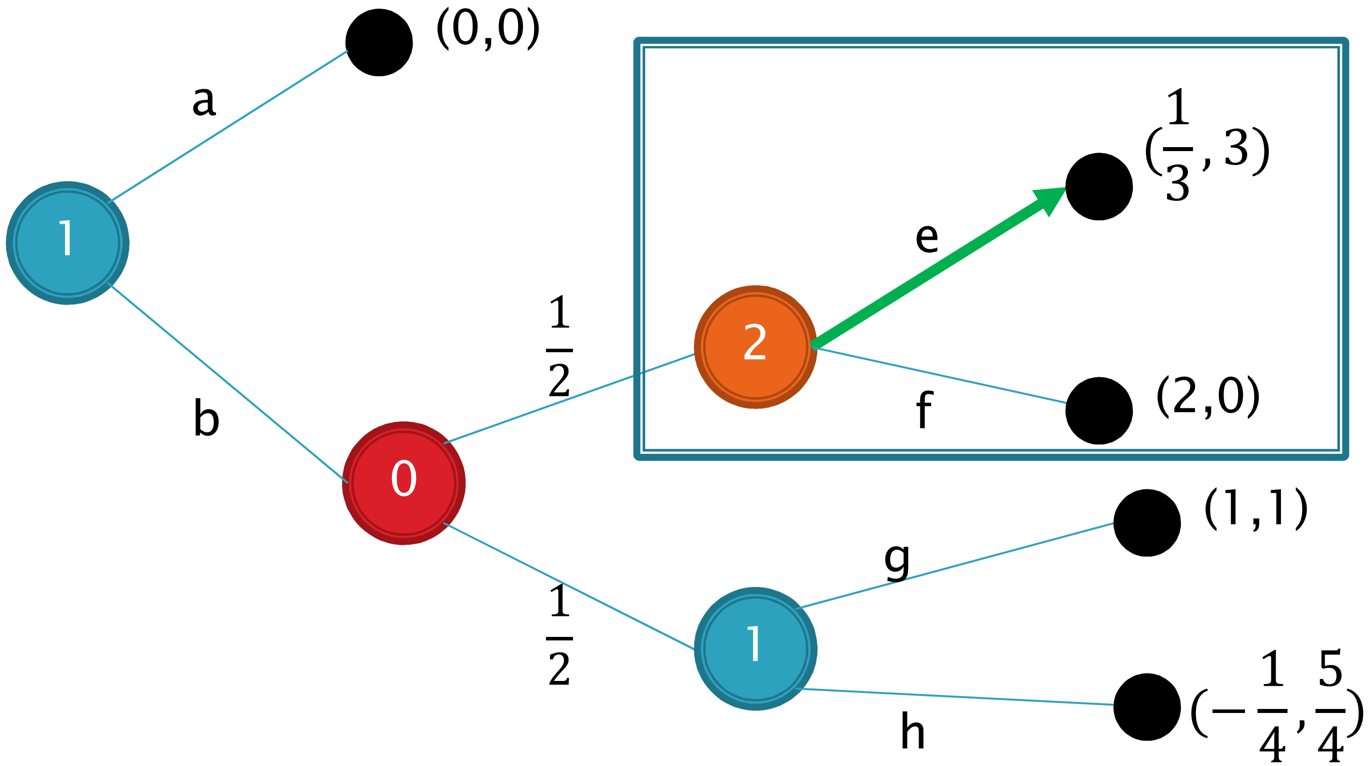
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור

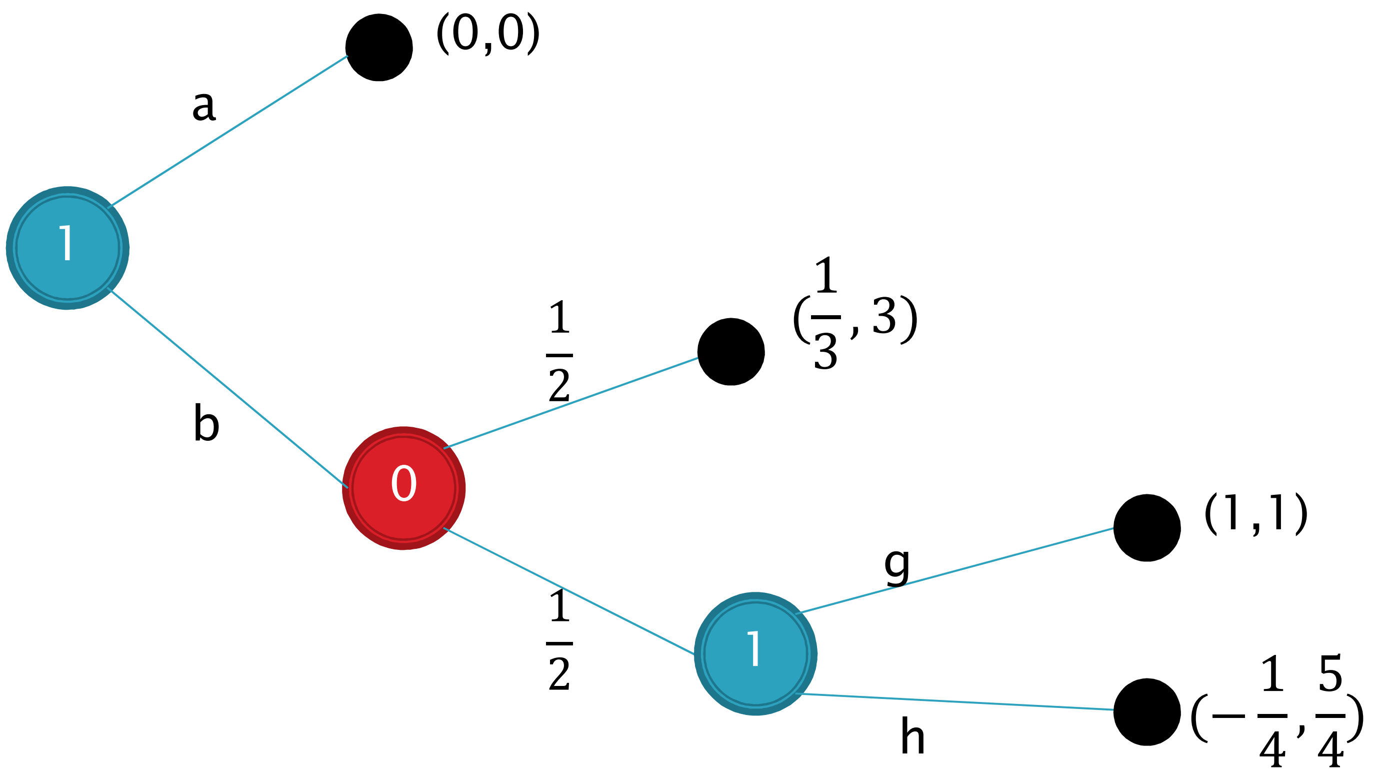


מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



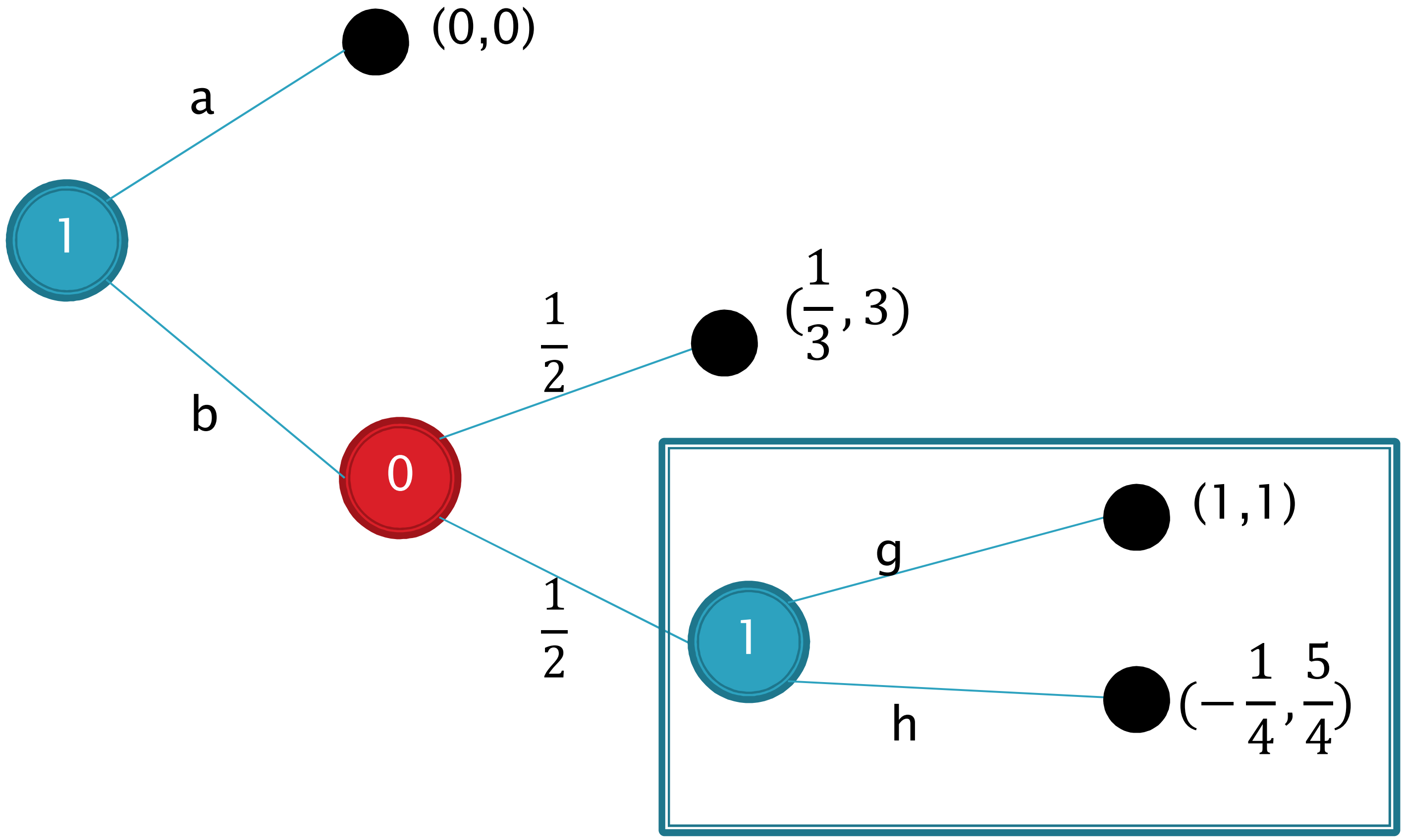
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



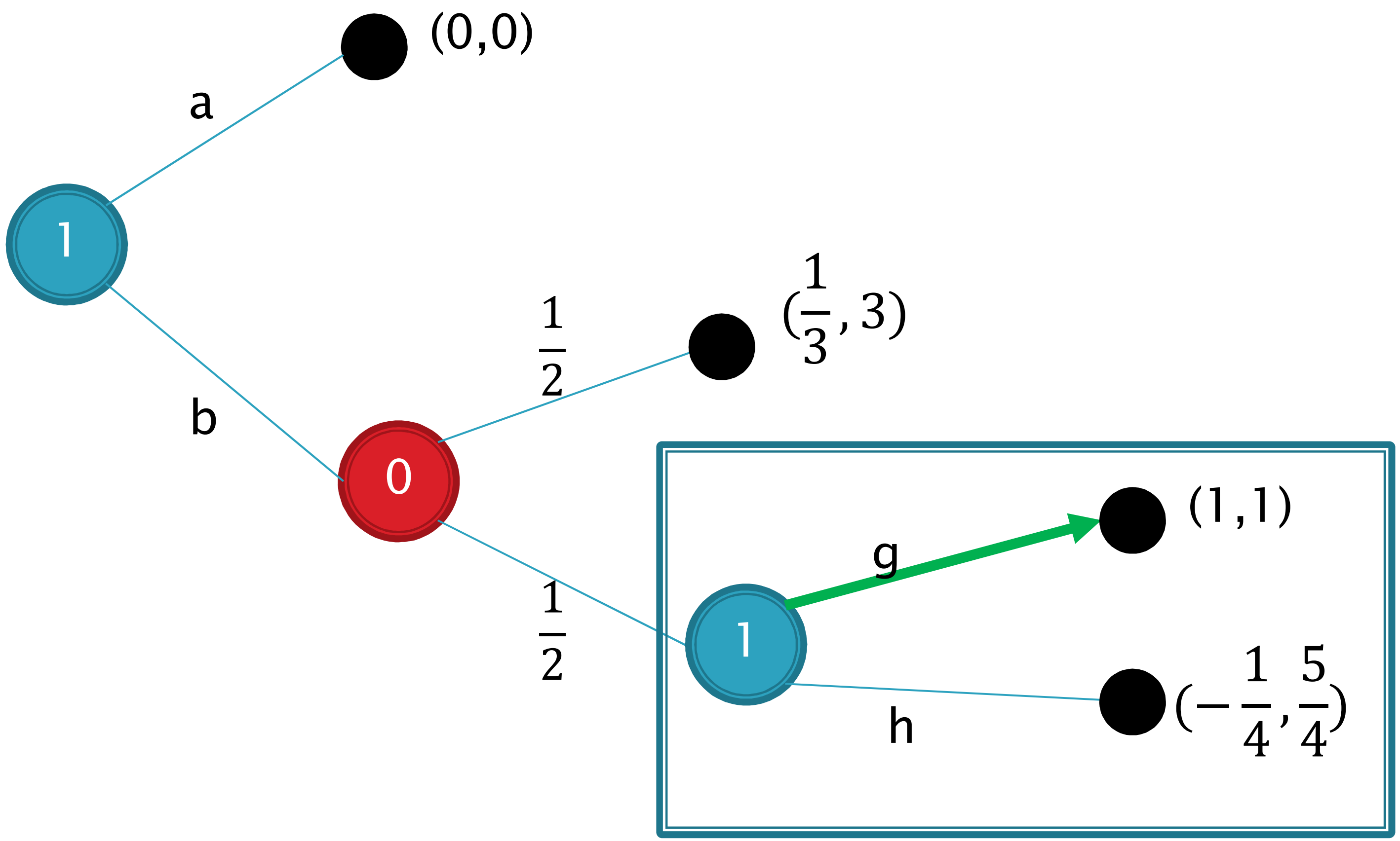
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



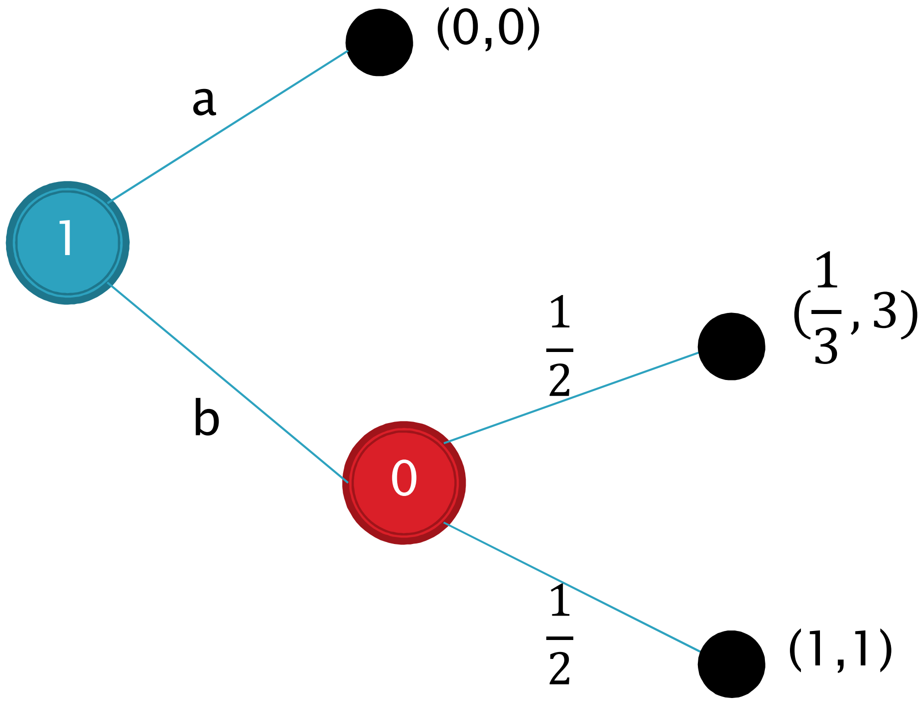
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



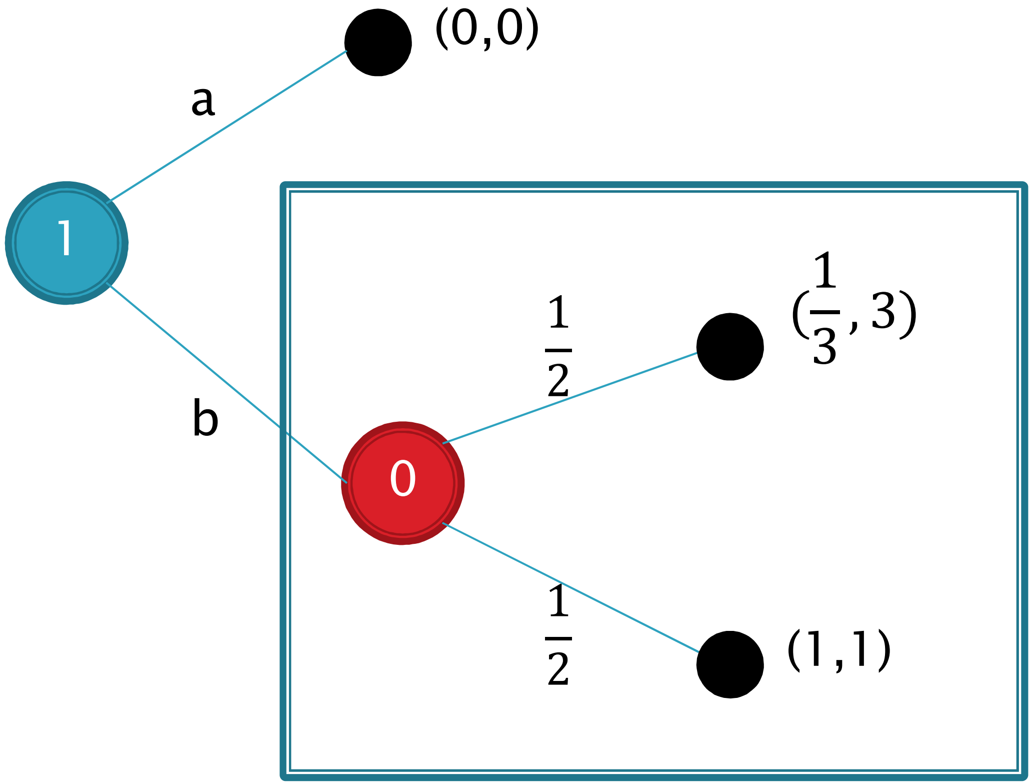
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



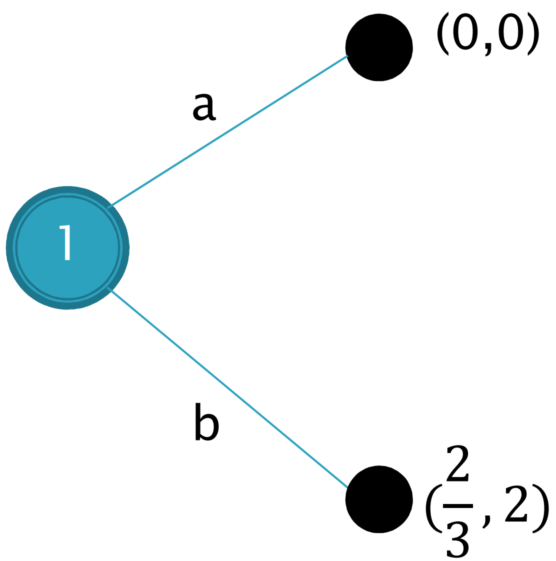
$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g\}$$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



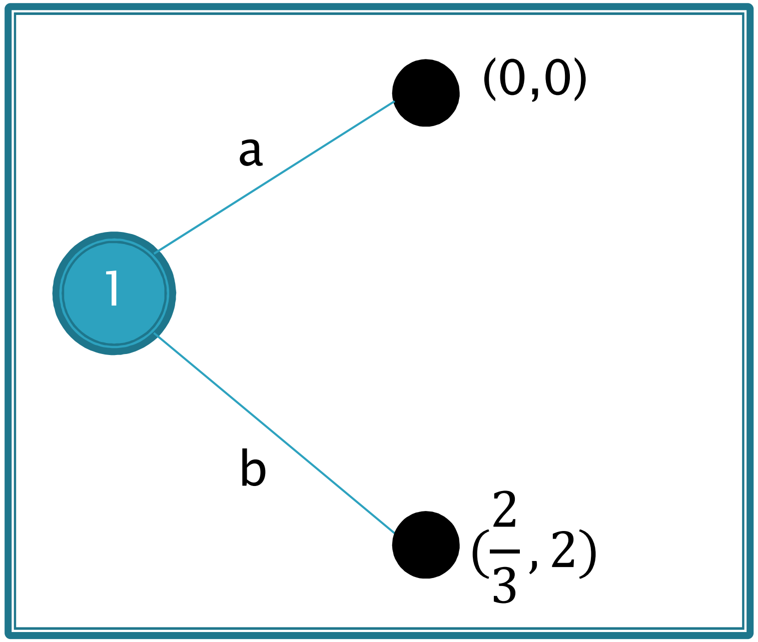
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



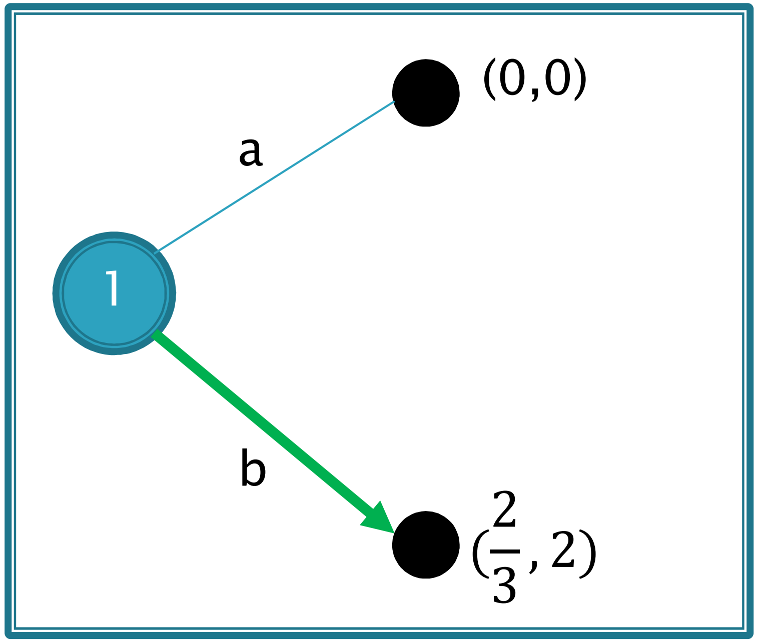
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



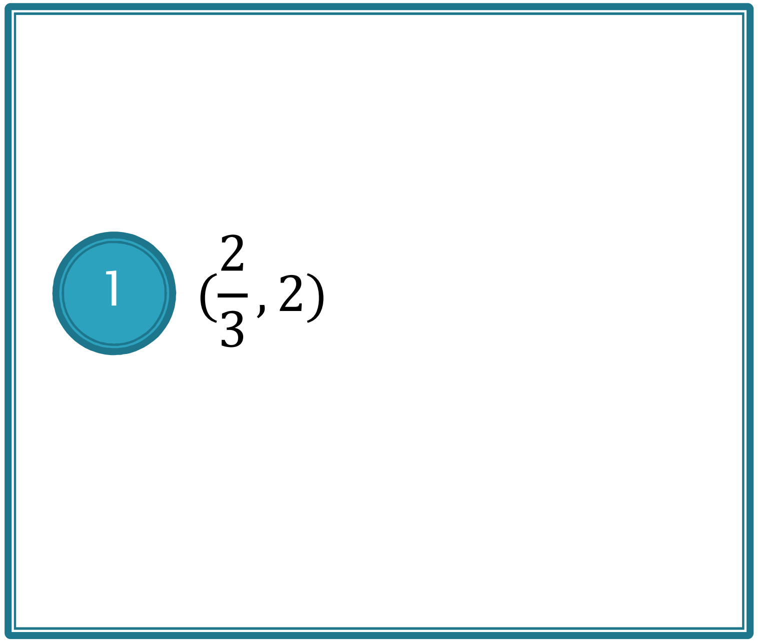
$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g\}$$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g, b\}$$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g, b\}$$