תקציר הרצאות באלגברה לינארית 2

בועז צבאן

1 במרץ 2012

תקציר מפורט של הקורס אלגברה לינארית 2, על פי תקציר קצר יותר, שנכתב על ידי בוריס קוניאבסקי ובועז צבאן. סייע לגירסה הנוכחית: נועם ליפשיץ. התקציר מתאים כחזרה ולא כתחליף להרצאות ולסיכומים המפורטים.

הערות: החומר בנושא משפט ג'ורדן (כ 6 הרצאות) כתוב בצורה מפורטת, ברשימות נפרדות באתר הקורס.

תקציר זה כולל, עבור חלק מהטענות (בדרך כלל, אלה שאינן מיידיות מההגדרות), את רעיון ההוכחה המרכזי (בצבע כחול), בשורה נפרדת. את פרטי ההוכחות, אם צריך, תמצאו בסיכומי ההרצאות.

מוסכמה: ערכים שאינם כתובים במטריצות, הם אפס ואינם מצויינים כדי שיהיה קל יותר לזכור. טענות שכתובות בלי כמתים, הכוונה שהן נכונות לכל אובייקט שמופיע בטענה, כאשר אובייקטים כמו v,u,w (עם או בלי אינדקסים) מציינים תמיד וקטורים במרחב רלוונטי, ואובייקטים כמו α,β,γ (עם או בלי אינדקסים) מציינים תמיד סקלרים בשדה רלוונטי.

1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

1. **ערך עצמי** של מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$: סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ כך שיש $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ שעבורו $Av=\lambda v$.
   v כזה נקרא **וקטור עצמי** של A (המתאים לערך עצמי λ).
2. ערך עצמי יכול להיות 0 ($\Longleftrightarrow$ המטריצה אינה הפיכה).
3. מציאת הערכים העצמיים: λ ערך עצמי $\Longleftrightarrow$ $|\lambda I-A|=0$.
4. הערכים העצמיים של מטריצה משולשית הם אברי האלכסון שלה.
5. דוגמא שאין ערכים עצמיים: $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$ ($|\lambda I-A|=\lambda^2+1\neq 0$).
6. מציאת הוקטורים העצמיים: אלה הפתרונות הלא טריויאליים של המערכת ההומוגנית $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$ (או $(A-\lambda I)\,\vec{x}=\vec{0}$).
7. תרגום המושגים והמשפטים לאופרטורים לינאריים $T:V\to V$:
   (א) הגדרת ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור לינארי. ($Tv=\lambda v$, $\vec{0}\neq v\in V$).
   (ב) הערכים העצמיים של אופרטור לינארי שוים לערכים העצמיים של (כל) הצגה שלו כמטריצה $[T]_B$.
   (ג) למטריצות דומות אותה דטרמיננטה.
   (ד) הדטרמיננטה של אופרטור לינארי, המוגדרת $|T|:=|[T]_B|$, אינה תלויה בבחירת הבסיס B.
8. באתר הקורס: שיטות למציאת שורשי פולינומים.

2 ליכסון (בסיסי)

1. **מטריצה לכסינה.**
   $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ **לכסינה** אם A דומה למטריצה אלכסונית (יש $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית).
2. יישום: חישוב חזקה גבוהה של מטריצה לכסינה.
   אם $D=P^{-1}AP$ אלכסונית, אז $A=PDP^{-1}$ ואז $A^k=PD^kP^{-1}$.

3. **קריטריון בסיסי לליכסון מטריצה:** מטריצה ריבועית היא לכסינה $\Longleftrightarrow$ יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים שלה. אברי בסיס זה הם עמודות המטריצה המלכסנת.

($\Leftarrow$) אם $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אז $P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i$, $APe_i = \lambda_i Pe_i$ והעמודות Pe_i של P הן בסיס.

($\Rightarrow$) אם הבסיס $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ מורכב מוקטורים עצמיים של A, ניקח $P = (v_1, \ldots, v_n)$ (עמודות המטריצה). נחשב את $P^{-1}AP$ לפי כפל עמודה־עמודה (ונשים לב ש $P^{-1}v_i = e_i$).

4. הערכים העצמיים מופיעים באלכסון המטריצה האלכסונית המתקבלת, לפי סדר הוקטורים העצמיים.

5. **המרחב העצמי** $V_\lambda = V_\lambda(A) := \{v \in \mathbb{F}^n \ : \ Av = \lambda v\}$. זה (תת־)מרחב.

6. בלוק ג'ורדן $\mathbb{F}^{n\times n} \ni \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} =: J_\lambda(n)$, $2 \leq n$, אינו לכסין.

7. תרגום לאופרטורים לינאריים $T\colon V \to V$:

   (א) T **לכסין** אם יש בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

   (ב) אברי B כנ"ל הם וקטורים עצמיים של T, ולכן: T לכסין $\Longleftrightarrow$ יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים שלו.

   (ג) **המרחב העצמי** $V_\lambda = V_\lambda(T) := \{v \in V \ : \ Tv = \lambda v\}$.

3 הפולינום האופייני

1. **הפולינום האופייני** $p_A(x) := |xI - A|$.

2. הערכים העצמיים של A הם שורשי $p_A(x)$.

3. הפולינום האופייני של מטריצה משולשת (בפרט אלכסונית או סקלרית) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ הוא $p_A(x) = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$.

4. **פולינום מתוקן** $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$.

5. **תיקון פולינום** שאינו 0: כפל בהופכי של המקדם המוביל.

6. הפולינום האופייני של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

   (א) מתוקן ומעלתו n.

   (ב) אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, אז $a_0 = (-1)^n\,|A|$, ו $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$.

   רק תמורת הזהות משפיעה על מקדמי x^n, x^{n-1}.

   $a_0 = p_A(0) = |-A|$.

7. למטריצות דומות אותו פולינום אופייני (ובפרט אותם ערכים עצמיים).

8. פולינום אופייני של אופרטור לינארי מוגדר היטב, ושווה לפולינום האופייני של כל הצגה שלו.

4 ריבוי גאומטרי ואלגברי

1. אם α שורש של פולינום $f(x)$, אז $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ לאיזשהו פולינום $g(x)$.

   $x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}\alpha^{i-1}$ ו $f\left(x\right) = f\left(x\right) - f\left(\alpha\right)$ הוא צירוף לינארי של כאלה.

2. **פולינום מחלק פולינום:** $f(x) | g(x)$ אם יש פולינום $h\left(x\right)$ כך ש $g(x) = h(x)f(x)$.

3. הראינו: אם $g(\alpha) = 0$, אז $(x - \alpha) | g(x)$.

4. **ריבוי אלגברי** של ערך עצמי λ: ה k המקסימלי כך ש $(x-\lambda)^k | p_A(x)$.
5. **ריבוי גאומטרי** של ערך עצמי λ: $\dim V_\lambda$.
6. $1 \leq \dim V_\lambda \leq$הריבוי האלגברי$\leq n$.

משלימים את הבסיס של V_λ לבסיס של V ושמים בעמודות מטריצה P. מכפל עמודה־עמודה, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I & * \\ O & * \end{pmatrix}$.

$p_A(x) = p_{P^{-1}AP}(x)$.

7. דוגמאות קצה במטריצות $n \times n$:
   (א) מטריצה סקלרית λI: ריבוי אלגברי וגם גאומטרי n.
   (ב) בבלוק ג'ורדן: ריבוי אלגברי n, ריבוי גאומטרי 1.

5 ליכסון, שילוש ומשפט קיילי־המילטון

1. אם A לכסינה, אז $p_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$.

   למטריצות דומות אותו פולינום אופייני.

2. וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

   ניקח i מינימלי כך ש $v_1, \ldots, v_i$ תלויים ליניארית.

   ניקח צירוף לא טריויאלי שלהם שמתאפס, נכפול ב A לקבל עוד אחד, ומשניהם עוד אחד, קצר יותר, סתירה.

3. מסקנה: אם למטריצה יש n ערכים עצמיים שונים, אז היא לכסינה.

   (אך יש מטריצות לכסינות עם ערך עצמי 1, למשל λI.)

4. **קריטריון מפורט לליכסון** כאשר $p_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים:

   A לכסינה $\Longleftrightarrow$ הריבוי הגאומטרי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו.

   סכום הריבויים האלגברים הוא n.

   $(\Leftarrow)$ n הוקטורים העצמיים הבת"ל מתחלקים בין הערכים העצמיים השונים, ולכן סכום הריבויים הגאומטריים הוא n. אם יהיה ערך עצמי עם ריבוי גאומטרי קטן מהאלגברי, סכום הריבויים הגאומטריים יהיה קטן מ n.

   $(\Rightarrow)$ נקבל שסכום הריבויים הגאומטריים הוא n, ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים הם בת"ל, לכן יש n וקטורים עצמיים בת"ל.

5. מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ **ניתנת לשילוש** אם היא דומה למטריצה משולשית.

6. כל מטריצה משולשית עליונה דומה למטריצה משולשית תחתונה (ולכן גם להיפך).

   ניקח $P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

7. **משפט השילוש.** $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש $\Longleftrightarrow$ $p_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$.

   נשלים וקטור עצמי v לבסיס ונשים בעמודות P. אז $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \vec{0} & B \end{pmatrix}$.

   $p_A(x) = (x-\lambda)p_B(x)$ ולכן גם $p_B(x)$ מתפרק לגורמים ליניארים.

   באינדוקציה על גודל המטריצה, יש Q שמשלשת את B, ואז $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ תשלש את A.

8. **הצבת מטריצה בפולינום:** עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$,

   $f(A) := a_0I + a_1A + \cdots + a_kA^k$.

9. **משפט קיילי־המילטון.** $p_A(A) = O$.

   $(xI-A)\operatorname{adj}(xI-A) = p_A(x)I = (x^n + \cdots + \alpha_0)I$, ואפשר לכתוב

   $\operatorname{adj}(xI-A) = x^{n-1}B_{n-1} + \cdots + xB_1 + B_0$.

   מציבים ומשווים אגפים.

10. באתר הקורס: הפולינום האופייני של המטריצה המלווה (companion matrix).

6 הפולינום המינימלי

1. **הפולינום המינימלי** $m_A(x)$: הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית שמאפס את A.
2. הפולינום המינימלי יחיד.

   הפרש בין שני פולינומים מינימליים הוא ממעלה קטנה יותר ואם אינו אפס, אפשר לתקנו, סתירה.
3. דרגתו $\geq n$.

   ממשפט קיילי־המילטון.
4. אם $Av = \lambda v$, אז לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $p(A)v = p(\lambda)v$.

   $A^k v = \lambda^k v$ לכל k.
5. כל ערך עצמי מאפס את $m_A(x)$.

   $\vec{0} = Ov = m_A(A)v = m_A(\lambda)v$.
6. **חלוקה של פולינומים עם שארית:** לכל $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה 1 או יותר, ולכל $0 \neq g(x) \in \mathbb{F}[x]$, יש $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש:

   (א) $f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$.

   (ב) המעלה של $r(x)$ קטנה מזו של $g(x)$.
7. $m_A(x) \mid p_A(x)$ ולמעשה לכל פולינום $f(x)$ כך ש $f(A) = O$.

   $f(x) = m_A(x)q(x) + r(x)$. נציב את A.
8. $p_A(x) \mid (m_A(x))^n$.

   בשיטת מצליח, מוצאים מטריצות $B_0, \ldots, B_{k-1}$ כך שהמטריצה

   $$B(x) = B_0 + xB_1 + x^2 B_2 + \cdots + x^{k-1} B_{k-1}$$

   תקיים $(xI - A)B(x) = m_A(x)I$. מפעילים דטרמיננטה על שני האגפים.
9. מסקנה: לפולינום האופייני והמינימלי אותם גורמים אי פריקים.
10. הפולינום המינימלי של $\lambda I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוא $x - \lambda$.
11. הפולינום המינימלי של בלוק ג'ורדן $J_n(\lambda)$ הוא $(x-\lambda)^n$.
12. מטריצה **אלכסונית־בלוקים:** מטריצה מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix},$$

כאשר $A_1, A_2, \ldots, A_k$ מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה (לאו דווקא מאותו סדר).

13. הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה אלכסונית־בלוקים: עבור A כנ"ל,

$$\begin{aligned} p_A(x) &= p_{A_1}(x) \cdot p_{A_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_{A_k}(x) \\ m_A(x) &= \operatorname{lcm}\left(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \ldots, m_{A_k}(x)\right) \end{aligned}$$

כאשר lcm של פולינומים הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם, כלומר הפולינום המתוקן הכי קטן שמתחלק בכולם בלי שארית.

7 צורת ג'ורדן (כ 6 הרצאות)

מפורט ברשימות נפרדות באתר הקורס. לך נא קחן משם.

13 מכפלה פנימית

1. **מכפלה פנימית** על מרחב וקטורי מעל הממשיים או המרוכבים:
   (א) **לינאריות ברכיב הראשון:** $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$. (כלומר, $u \mapsto \langle u, v \rangle$ העתקה לינארית).
   (ב) **הרמיטיות:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$. (מעל $\mathbb{R}$, זו סימטריות $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.)
   (ג) **אי־שליליות:** $\langle v, v \rangle \geq 0$ (ממשי) ושויון $\iff v = \vec{0}$.
2. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** על $\mathbb{F}^n$ (וקטורי עמודה): $\langle u, v \rangle := u^t \overline{v}$.
   במפורש: $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}$.
3. **כמו־לינאריות** (ומעל $\mathbb{R}$ לינאריות ממש) ברכיב השני: $\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \overline{\beta_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle u, v_2 \rangle$.
4. **מטריצת גראם**

$$G_{\{v_1, \ldots, v_k\}} := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times k}.$$

5. עבור B בסיס: $\langle u, v \rangle = [u]_B^t G_B \overline{[v]_B}$.
   אם $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, אז מלינאריות וכמו־לינאריות, $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle$.
6. מסקנה: מטריצת גראם קובעת את המכפלה הפנימית; מכפלות פנימיות שמתלכדות על בסיס הן זהות.
7. לכל זוג בסיסים B, C מתקיים $G_B = \left([I]_C^B\right)^t G_C \overline{[I]_C^B}$.
   מחשבים את $e_i^t A e_j$ עבור כל אחת משתי המטריצות, ומראים שיוצא אותו דבר לכל i, j.

14 נורמה, בסיס אורתונורמלי

1. **נורמה:** פונקציה $\| \; \| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת:
   (א) **אי־שליליות:** $\|v\| \geq 0$ ושיווין $\iff v = \vec{0}$.
   (ב) **הומוגניות:** $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$.
   (ג) **אי־שיווין המשולש:** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
2. **נורמה מושרית ממכפלה פנימית:** $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
3. הנורמה המושרית ממכפלה פנימית מקיימת אי־שליליות והומוגניות. (רק עליהם נסתמך עד שנוכיח את אי־שיווין המשולש.)
4. **וקטור נורמלי:** וקטור v המקיים $\|v\| = 1$.
5. **נירמול וקטור:** הכפלה בסקלר $\frac{1}{\|v\|}$ לקבלת הוקטור $\tilde{v} := \frac{1}{\|v\|} v$.
6. אפשר לנרמל כל וקטור פרט ל $\vec{0}$, והוקטור המנורמלי $\tilde{v}$ מקיים $\|\tilde{v}\| = 1$.
7. u, v **מאונכים** אם $\langle u, v \rangle = 0$. סימון: $u \perp v$.
8. תכונות:
   (א) $v_1 \perp v_2 \Longleftarrow v_2 \perp v_1$.
   (ב) $v \perp \vec{0}$.
   (ג) $v_1 \perp v_2 \Longleftarrow \alpha v_1 \perp \beta v_2$.
9. קבוצה S היא **אורתוגונלית** אם כל שני איברים שונים שלה מאונכים.
10. $S \not\ni \vec{0}$ אורתוגונלית $\Leftarrow S$ בת"ל.
    $\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$, לכן אם הצירוף מתאפס המקדמים מתאפסים.

11. **קבוצה אורתונורמלית:** קבוצה אורתוגונלית שכל איבריה נורמלים.
12. קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל.
13. $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה אורתונורמלית $\Longleftrightarrow$ $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ (לכל $1\le i,j\le n$) $\Longleftrightarrow G_B=I$.
14. **בסיס אורתוגונלי:** בסיס שהוא קבוצה אורתוגונלית.
15. **בסיס אורתונורמלי:** בסיס שהוא קבוצה אורתונורמלית.
16. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית, הבסיס הסטנדרטי $\{e_1,\dots,e_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.
17. עבור בסיס אורתונורמלי, המכפלה הפנימית שווה למכפלה פנימית הסטנדרטית של הצגות הוקטורים $\langle u,v\rangle=[u]_B^t\overline{[v]_B}$.
    $\langle u,v\rangle=[u]_B^tG_B\overline{[v]_B}$ ו $G_B=I$.
18. הצגת וקטור לפי בסיס אורתונורמלי: אם $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$, אז $\alpha_i=\langle v,v_i\rangle$.
19. **משפט פיתגורס:** עבור בסיס אורתונורמלי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ ווקטור $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$,
    $\|v\|^2=[v]_B^t\overline{[v]_B}=|\alpha_1|^2+\dots+|\alpha_n|^2$.

15 בסיס אורתונורמלי והטלות

1. $A^*:=\overline{A^t}=\overline{A}^t$.
2. **מטריצה אוניטרית:** $A^*=A^{-1}$.
3. A אוניטרית $\Longleftrightarrow$ A^t אוניטרית.
4. מטריצה אוניטרית $\Leftrightarrow$שורותיה בא"נ במ"פ הסטנדרטית $\Leftrightarrow$ עמודותיה בא"נ במ"פ הסטנדרטית.
5. מטריצת מעבר בין בא"נ היא אוניטרית.
   $\left([I]_F^E\right)^tG_F\overline{[I]_F^E}=G_E$ ושתי המטריצות גראם הן I.
6. **המרחב הניצב לקבוצה:** $S^\perp=\{v\in V\ :\ \forall u\in S,\ \langle v,u\rangle=0\}$. זה (תת־)מרחב.
7. $S^\perp=\operatorname{span}(S)^\perp$.
8. היטל של וקטור לתת־מרחב W עם בסיס אורתוגונלי $B=\{w_1,\dots,w_k\}$:
   $$\pi_B(v):=\frac{\langle v,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1+\dots+\frac{\langle v,w_k\rangle}{\|w_k\|^2}w_k.$$
   אם נכפול את וקטורי הבסיס האורתוגונלי בסקלרים שונים מאפס, התוצאה לא תשתנה.
   אם הבסיס אורתונורמלי, אז $\pi_B(v):=\langle v,w_1\rangle w_1+\dots+\langle v,w_k\rangle w_k$.
9. ההיטל שייך לתת־המרחב.
10. $\pi_B(v)=v \Longleftrightarrow v\in W$.
11. $v-\pi_B(v)\in W^\perp$.
    $v-\pi_B(v)\in B^\perp=W^\perp$.

16 המרחב הניצב ותהליך גראם־שמידט

1. **תהליך גראם־שמידט** (בלי נירמול): יהיו $v_1,\ldots,v_n$ בסיס.

   (א) $\mathring{v}_1 := v_1$.

   (ב) עבור $k>1$, $\mathring{v}_k := v_k - \pi_{\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k)$.

   אופציונלי: כפל $\mathring{v}_k$ בסקלר $\neq 0$.

2. לכל k, $\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$ בסיס אורתוגונלי של $\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}$. בפרט, בסוף מתקבל בסיס אורתוגונלי של המרחב כולו. לקבלת בסיס אורתונורמלי, אפשר לנרמל בסוף.

   הכפל בסקלר לא משנה את ההטלות ולכן לא משנה את התהליך.

   $v_k = \mathring{v}_k + \pi_{\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k) \in \operatorname{span}\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$ ולכן $\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\} \subseteq \operatorname{span}\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$ ולכן שווים.

3. כל קבוצה אורתונורמלית אפשר להשלים לבסיס אורתונורמלי.

   משלימים לבסיס ומפעילים גראם־שמידט. הקבוצה האורתונורמלית אינה משתנה בתהליך.

4. **אי־שיוויון בסל:** עבור $v_1,\ldots,v_k$ אורתונורמלים, $\|v\|^2 \geq |\langle v,v_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v,v_k\rangle|^2$, ושויון $\Longleftrightarrow$ $v \in \operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}$.

   השלמה לבסיס אורתונורמלי ומשפט פיתגורס.

   אם מתקיים שויון, אז $|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2 + \cdots + |\langle v,v_n\rangle|^2 = 0$.

5. **אי־שיוויון קושי־שוורץ:** $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ ושיוויון $\Longleftrightarrow$ הם תלויים לינארית.

   $\frac{u}{\|u\|}$ אורתונורמלי; אי־שיויון בסל.

17 שימושים של גראם־שמידט ומשפט הפירוק הניצב

1. "הנורמה המושרית" מקיימת את אי־שיוויון המשולש (ולכן היא נורמה).

   $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2$; הפעלת ערך מוחלט, אי־שיויון המשולש למספרים ממשיים, ואי־שיויון קושי־שוורץ.

2. מטריצת המעבר מתוצר תהליך גראם־שמידט לבסיס המקורי היא משולשית עליונה. (ולכן גם מטריצת המעבר בכוון ההפוך.)

3. **משפט הפירוק הניצב:** לכל תת־מרחב U של V מתקיים $U \oplus U^{\perp} = V$.

   הוקטורים שמשלימים בסיס אורתונורמלי של U לבסיס אורתונורמלי של V הם בסיס של $U^{\perp}$.

4. $U^{\perp\perp} = U$.

   $U \subseteq U^{\perp\perp}$ ומימדם שווה.

5. ההטלה לתת־מרחב אינה תלויה בבחירת בסיסו האורתונורמלי.

   מיחידות ההצגה במשפט הפירוק הניצב: $\pi_B(v) + (v - \pi_B(v)) = v = \pi_C(v) + (v - \pi_C(v))$.

6. אם $v \perp u$, אז $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

   חישוב ישיר.

7. ההיטל של v על W הוא הוקטור ב W הקרוב ביותר ל v.

   $v - \pi(v) \perp w - \pi(v)$, לכן $\|v-w\|^2 = \|v-\pi(v)\|^2 + \|w-\pi(v)\|^2$.

18 ההעתקה הצמודה

1. **פונקציונל לינארי:** העתקה לינארית $\varphi\colon V\to\mathbb{F}$.
2. **משפט ההצגה של ריס:** לכל פונקציונל לינארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi\left(v\right)=\left\langle v,u\right\rangle$.

   יחידות: אם $\left\langle v,u_{1}\right\rangle =\left\langle v,u_{2}\right\rangle$ אז $\left\langle v,u_{1}-u_{2}\right\rangle =0$ ובפרט $\left\langle u_{1}-u_{2},u_{1}-u_{2}\right\rangle =0$.

   קיום: לפי בסיס אורתונורמלים, $\varphi(v)=\left[\varphi(v)\right]_{\{1\}}=\underbrace{\left[\varphi\right]_{\{1\}}^{B}}_{\vec{b}^{\,t}}\left[v\right]_{B}=\left[v\right]_{B}^{t}\vec{b}$ (סקלר). ניקח u כך ש $\overline{\left[u\right]_{B}}=\vec{b}$.
3. **ההעתקה הצמודה:** תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה. $T^{*}\colon W\to V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת $\left\langle T\left(v\right),w\right\rangle =\left\langle v,T^{*}(w)\right\rangle$ (כוכב נולד) לכל $v\in V,w\in W$.

   T^{*} קיימת ממשפט ריס.
4. T^{*} לינארית.

   $\left\langle v,T^{*}\left(\alpha w_{1}+\beta w_{2}\right)\right\rangle =\left\langle v,\alpha T^{*}w_{1}+\beta T^{*}w_{2}\right\rangle$ לכל $v\in V$, ממשוואת כוכב נולד.
5. עבור בסיסים אורתונורמלים, $\left[T^{*}\right]_{E}^{F}=\left(\left[T\right]_{F}^{E}\right)^{*}$.

   חישוב $e_{i}^{t}Ae_{j}=\left[v_{i}\right]_{E}^{t}A\left[w_{j}\right]_{F}$ לכל אחת מהמטריצות, כאשר $E=\left\{ v_{1},v_{2}\dots v_{n}\right\} ,F=\left\{ w_{1},\dots,w_{m}\right\}$.
6. מסקנה: $(T+S)^{*}=T^{*}+S^{*},(\alpha T)^{*}=\bar{\alpha}T^{*},T^{**}=T,(ST)^{*}=T^{*}S^{*}$.

   מציגים לפי בסיסים אורתונורמלים.

19 תכונות וסוגים מיוחדים של אופרטורים

1. אופרטור $T\colon V\to V$ נקרא:

   (א) **נורמלי** אם $TT^{*}=T^{*}T$.

   (ב) **אוניטרי** אם $T^{*}=T^{-1}$.

   (ג) **צמוד לעצמו** אם $T^{*}=T$
2. בדומה, מגדירים מטריצה (ריבועית) נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה.
3. אופרטור T נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו $\iff$ הצגתו $A:=\left[T\right]_{B}$ לפי בסיס אורתונורמלי היא נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה.

   מטריצה A היא נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה $\iff$ האופרטור $L_{A}:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{n}$ של כפל ב A משמאל הוא נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו.
4. $\mathrm{Re}\left\langle u,v\right\rangle =\frac{1}{2}\left(\left\Vert u+v\right\Vert ^{2}-\left\Vert u\right\Vert ^{2}-\left\Vert v\right\Vert ^{2}\right)$.

   חישוב $\left\Vert u+v\right\Vert ^{2}$.
5. הזהות הפולרית מעל $\mathbb{R}$: $\left\langle u,v\right\rangle =\frac{1}{2}\left(\left\Vert u+v\right\Vert ^{2}-\left\Vert u\right\Vert ^{2}-\left\Vert v\right\Vert ^{2}\right)$.
6. $\mathrm{Im}\left\langle u,v\right\rangle =\mathrm{Re}\left\langle u,iv\right\rangle =\frac{1}{2}\left(\left\Vert u+iv\right\Vert ^{2}-\left\Vert u\right\Vert ^{2}-\left\Vert v\right\Vert ^{2}\right)$.
7. הזהות הפולרית מעל $\mathbb{C}$: $\left\langle u,v\right\rangle =+\frac{1}{2}\left(\left\Vert u+v\right\Vert ^{2}-\left\Vert u\right\Vert ^{2}-\left\Vert v\right\Vert ^{2}\right)+\frac{i}{2}\left(\left\Vert u+iv\right\Vert ^{2}-\left\Vert u\right\Vert ^{2}-\left\Vert v\right\Vert ^{2}\right)$.
8. מסקנה: הנורמה המושרית קובעת את המכפלה הפנימית.
9. T נורמלי $\iff$ $\left\Vert Tv\right\Vert =\left\Vert T^{*}v\right\Vert$.

   מהזהות הפולרית.
10. התכונות הבאות שקולות עבור אופרטור:

    (א) אוניטרי.

    (ב) שומר מכפלה פנימית:$\left\langle v,v\right\rangle =\left\langle Tv,Tv\right\rangle$.

    (ג) שומר נורמה:$\left\Vert Tv\right\Vert =\left\Vert v\right\Vert$.

    (ד) שומר מרחקים:$\left\Vert T\left(v-u\right)\right\Vert =\left\Vert v-u\right\Vert$.

$a \Leftarrow b \Leftarrow c \Leftarrow d \Leftarrow c \Leftarrow a$, הגרירה האחרונה מהזהות הפולרית.

11. **זוית** במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$: הסקלר היחיד $0 \leq \theta < \pi$ שמקיים $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

12. אם T נורמלי, אז T, T^* משפיעים באותו אופן על זויות.

13. אופרטור אוניטרי שומר גם זויות: $\angle(u,v) = \angle(Tu, Tv)$.
הכיוון ההפוך לא נכון: $T(v) = 5v$ על $\mathbb{R}^2$.

14. הצגת אופרטות הסיבוב בזוית α, R_α, על $\mathbb{R}^2$, לפי הבסיס הסטנדרטי: $[R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
על סמך פעולותיו על e_1, e_2.

15. שימוש: כיון ש $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, נקבל הוכחה לנוסחאות של $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$.

20 שילוש אוניטרי

1. מחישוב ישיר (או תרגום מאופרטורים), לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, המכפלה הפנימית **הסטנדרטית** על $\mathbb{F}^n$ מקיימת:
   (א) $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$.
   (ב) אם A נורמלית, אז $\|Av\| = \|A^*v\|$.
   (ג) אם A אונטרית, אז $\|Av\| = \|v\|$.

2. עבור אופרטור/מטריצה נורמלי/ת, אם $Av = \lambda v$, אז $A^*v = \bar{\lambda}v$.
גם $A - \lambda I$ נורמלית, לכן $\left\|(\bar{\lambda}I - A^*)v\right\| = \|(\lambda I - A)^*v\| = \|(\lambda I - A)v\| = 0$.

3. מסקנות:
   (א) וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים הם מאונכים.
   מחשבים $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ לוקטורים העצמיים.
   (א) כל הערכים העצמיים של אופרטור צמוד לעצמו הם ממשיים.
   $\lambda v = Av = A^*v = \bar{\lambda}v$.

4. מעל $\mathbb{R}$: אם $p_T(x)$ אינו מתפרק לגורמים לינאריים , אז T אינו ניתן לשילוש (ובפרט אינו לכסין). בדומה עבור מטריצות.

5. **משפט השילוש האוניטרי עבור אופרטורים:** אם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אז יש בסיס אורתונורמלי כך ש $[T]_B$ משולשית.
הוכחה: משפט השילוש ותהליך גראם־שמידט על הבסיס.

6. גם הכוון ההפוך נכון: T ניתן לשילוש אוניטרי $\iff$ $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

7. **משפט השילוש האוניטרי עבור מטריצות:** אם $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אז יש P אוניטרית כך שהמטריצה $P^*AP = P^{-1}AP$ משולשית.
תרגום מאופרטורים.

8. מציאת P במפורש: הפעלת תהליך גראם־שמידט על P של משפט השילוש הרגיל.

9. מעל $\mathbb{C}$: כל אופרטור/מטריצה ריבועית ניתן לשילוש אוניטרי.

21 ליכסון אוניטרי ואורתוגונלי

1. מטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית.
השוואת אברי האלכסון של המטריצות $AA^* = A^*A$.

2. **משפט הליכסון האוניטרי עבור אופרטורים:** כל אופרטור **נורמלי** עם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, הוא לכסין אוניטרית.
ממשפט השילוש האוניטרי, נקבל מטריצה משולשית ונורמלית, לכן אלכסונית.

3. נורמליות היא גם תנאי הכרחי: כל אופרטור לכסין אוניטרית הוא נורמלי, והפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים לינאריים.

4. **משפט הליכסון האוניטרי עבור מטריצות:** כל מטריצה נורמלית עם פולינום אופייני מתפרק לגורמים לינאריים היא לכסינה אוניטרית, ולהיפך.

תרגום מאופרטורים.

5. במפורש: גראם־שמידט על בסיס המורכב מוקטורים עצמיים (יש כזה כי המטריצה לכסינה).

אפשר לבצע גראם־שמידט על בסיס כל מרחב עצמי בנפרד.

6. מעל $\mathbb{C}$:

(א) אופרטור הוא נורמלי $\iff$ לכסין אוניטרית.

(ב) מטריצה היא נורמלית $\iff$ לכסינה אוניטרית.

מעל $\mathbb{C}$, הפולינום האופייני מתפרק תמיד לגורמים לינאריים.

7. נתמקד כעת במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

8. אופרטור/מטריצה אוניטרי/ת מעל $\mathbb{R}$ נקרא **אורתוגונלי/ת**.

9. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור מטריצות:** לכל $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית, יש $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אורתוגונלית כך שהמטריצה $P^tAP=P^{-1}AP$ אלכסונית. סימטריות היא גם תנאי הכרחי.

$p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$ והערכים העצמיים ממשיים, לכן מתפרק גם מעל $\mathbb{R}$. נפעיל את משפט הליכסון האוניטרי.

10. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור אופרטורים:** כל אופרטור צמוד־לעצמו הוא לכסין אורתוגונלית . "צמוד־לעצמו" הוא גם תנאי הכרחי.

תרגום ממטריצות.

11. (כמו קודם) במפורש: גראם־שמידט על בסיס המורכב מוקטורים עצמיים, לכל מרחב עצמי בנפרד.

12. מסקנה: מעל $\mathbb{R}$, אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, אז נורמלי וצמוד לעצמו (=סימטרי) זה אותו דבר.

13. דוגמא נגדית כאשר הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים: $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ מקיימת $A^t=-A$ (אנטי־סימטרית) ולכן נורמלית ולא סימטרית.

22 המרחב הדואלי

1. $V^*:=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$. בפרט, מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

2. $\dim V^*=\dim\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})=\dim V$, ולכן איזומורפיים.

3. **בסיס דואלי** לבסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$: $B^*=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, $\varphi_i(v_j):=\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ (הגדרת העתקה לינארית על הבסיס B).

4. B^* בלתי תלוי לינארית וגודלו שווה למימד של V^*, לכן בסיס.

5. הוכחה ישירה של פרישה: $\varphi=\varphi(v_1)\varphi_1+\cdots+\varphi(v_n)\varphi_n$. במלים אחרות, $[\varphi]_{B^*}=(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))^t$.

שני הפונקציונלים מתלכדים על $v_1,\dots,v_n$.

6. אם V מרחב מכפלה פנימית, אז $\varphi_i=\langle\cdot,v_i\rangle$.

7. לכל $v\in V$, $v=\varphi_1(v)v_1+\cdots+\varphi_1(v)v_n$, כלומר

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\varphi_1(v)\\ \vdots\\ \varphi_n(v)\end{pmatrix}.$$

8. מתקבל איזומורפיזם מפורש:

$$\begin{aligned} v &\mapsto (\alpha_1,\dots,\alpha_n):=[v]_B=(\varphi_1(v),\dots,\varphi_n(v))\\ &\mapsto \alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_n\varphi_n=\varphi_1(v)\varphi_1+\cdots+\varphi_n(v)\varphi_n \end{aligned}$$

איזומורפיזם זה **תלוי בבחירת הבסיס** B.

9. יהיו E,F בסיסים ו E^*,F^* הבסיסים הדואלים. אזי $[I]_{F^*}^{E^*}=\left([I]_E^F\right)^t$.
נניח

$$\begin{aligned} E &= \{v_1,\ldots,v_n\}, F=\{w_1,\ldots,w_n\}, \\ E^* &= \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \end{aligned}$$

אז

$$[I]_{F^*}^{E^*} = ([\varphi_1]_{F^*},\ldots,[\varphi_n]_{F^*}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \varphi_2(w_1) & \ldots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \varphi_2(w_n) & \ldots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [w_1]_E^t \\ \vdots \\ [w_n]_E^t \end{pmatrix} = \left([I]_E^F\right)^t.$$

10. $V^{**}:=(V^*)^*$, מרחב כל הפונקציונלים $\xi:V^*\to\mathbb{F}$.
11. $V\cong V^*\cong V^{**}$, ולכן $V\cong V^{**}$. נראה שיש איזומורפיזם "טבעי", כזה שאינו תלוי בבחירות של בסיסים.
12. לכל $v\in V$, נגדיר פונקציה $\hat{v}:V^*\to\mathbb{F}$ על ידי

$$\hat{v}(\varphi):=\varphi(v).$$

13. $\hat{v}$ לינארי, כלומר $\hat{v}\in V^{**}$.
14. הפונקציה $E:V\to V^{**}$ המוגדרת $E(v):=\hat{v}$ היא איזומורפיזם (שנקרא **איזומורפיזם ההצבה**).
לינארית. $\ker E=\left\{\vec{0}\right\}$, ולכן חח"ע. לכן על (כי המימד שווה).
15. כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V.
16. אם $C=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ בסיס של V^*, אז עבור הבסיס $C^*:=\{\widehat{v_1},\ldots,\widehat{v_n}\}$ של V^{**} ניקח $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$. $B^*=C$.
17. עבור $S\subseteq V$, $S^\circ:=\{\varphi\in V^* : \forall v\in S,\ \varphi(v)=0\}$ **המאפס** של S. (מסומן גם $\mathrm{Ann}(S)$.)
18. $S^\circ\subseteq V^*$ תת־מרחב.
19. $S^\circ=(\operatorname{span} S)^\circ$.
20. $\dim U+\dim U^\circ=\dim V$.
נשלים בסיס $\{v_1,\ldots,v_k\}$ של U לבסיס $\{v_1,\ldots,v_n\}$ של V. $\varphi\in U^\circ \iff [\varphi]_B=(0,\ldots,0,*,\ldots,*)$ (k אפסים).
21. לכל $U\subseteq V$, $U^{\circ\circ}=E[U]=\{\hat{u} : u\in U\}$.
$E[U]\subseteq U^{\circ\circ}$ ומהסעיף הקודם, מימדם שווה.

23 הערשה: משפט פרובניוס וגוגל

באתר הקורס.