מרצה: תמר בר-און
$tamarnachshoni@gmail.com$
אתר: $math-wiki$
מבוא לאנליזה מתקדמת.
באתר: מבחנים משנים קודמות, רשימת נושאים.
נעלה לאתר הקלטות, סיכומים וש"ב.
חובות: יש ש"ב לא להגשה.
באמצע הסמסטר: עבודת הגשה. (15% מהציון, מגן).
מבחן- 85%.
נושאים:
1. מספרים מרוכבים.
2. משוואות דיפרניצאליות- מד"ר

במד"ר נראה:
1. שימוש של המתמטיקה בפתרון בעיות פיזיקליות מחיי היומיום.
2. שימוש של מספרים מרוכבים בשביל לפתור בעיות פיזיקליות מהחיים האמיתיים.

זמן: $8-9:30$
$9:40-10:25$
מספרים מרוכבים:
שלב ראשון:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$$

$$\mathbb{Z}=\{-1,-2,0,1,2,...\}$$

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,2=\frac{2}{1},...\}$$

$$\mathbb{R}=\{\pi,e,\sqrt{2},\sqrt{3},\ln 5,1,\frac{1}{8},...\}$$

הגדרה: נגדיר מספר שנקרא לו i, שמקיים: $i^2=-1$.
בעצם הוספנו פתרון למשוואה $x^2=-1$.
מספרים מרוכבים הם מספרים מהצורה: $a+bi$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.
דוגמאות:

$$3+2i,4i,1-i,e-2\pi i$$

כל המספרים הממשיים הם גם מרוכבים, נקח $b=0$.
סימון: בד"כ נסמן מספר מרוכב כללי ב-z. לקבוצה של המספרים המרוכבים יש סימון: $\mathbb{C}$. ($complex$).
הגדרות: לכל מספר מרוכב, (לכל $z\in\mathbb{C}$) יש שני מאפיינים שמגדירים אותו:
1. החלק הממשי.
2. החלק המדומה.

אם $z = a + bi$
החלק הממשי של z,

$$Re(z) = a$$

החלק המדומה של z,

$$Im(z) = b$$

לדוגמא:

$$Z = 2 - 5i$$

$$Re(z) = 2$$

$$Im(z) = -5$$

יהי z מספר שמקיים:

$$Re(z) = -1, Im(z) = 4\pi$$

מי זה z?

$$z = -1 + 4\pi i$$

הערה: יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2)$$

הגדרה:
1. מספר מרוכב נקרא ממשי, אם החלק המדומה שלו הוא 0.
2. מספר מרוכב נקרא "מדומה טהור" אם החלק הממשי שלו הוא 0. (bi).
לדוגמא:
2. $i, -i, \pi i$
פעולות חשבוניות:
1. חיבור: $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

דרך כתיבה נוספת:

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

$$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$$

דוגמא:

$$(2+4i) + (-5-i) = -3+3i$$

2. חיסור: $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

דרך כתיבה נוספת:

$$Re(z_1 - z_2) = Re(z_1) - Re(z_2)$$

$$Im(z_1 - z_2) = Im(z_1) - Im(z_2)$$

דוגמא:

$$(2+4i) - (-5-i) = 7+5i$$

3. כפל:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + (bi)(di) =$$

נשתמש בזהות $i^2 = -1$ ונקבל:

$$ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

דוגמאות:

$$(2+i)(3-4i) = 6 - 8i + 3i + 4 = 10 - 5i$$

$$(1-2i)(-4+i) = -2+9i$$

$$(3+i)(2+2i) = 4+8i$$

4. חילוק:

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

$$\frac{1+2i}{3-4i}$$

בשביל שנוכל לדבר על פעולת החילוק, אנחנו צריכים להכיר שני מושגים חדשים:
1. צמוד.
הגדרה: יהי z מספר מרוכב. הצמוד של z הוא מספר מרוכב, מסומן $\bar{z}$ שמקיים:

$$Re(\bar{z}) = Re(z)$$

$$Im(\bar{z}) = -Im(z)$$

במילים אחרות: אם $z = a + bi$ אז $\bar{z} = a - bi$.
דוגמא:

$$\overline{1+i} = 1 - i$$

תכונות של פעולת הצמוד:
1. חיבוריות:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

הוכחה: בשביל להוכיח ששני מספרים מרוכבים שווים, צריך להראות שהחלק הממשי שלהם שווה, והחלק המדומה שלהם שווה.

$$Re(\overline{z_1 + z_2}) = Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

$$Re(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = Re(\overline{z_1}) + Re(\overline{z_2}) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

הגענו לשוויון.

$$Im(\overline{z_1 + z_2}) = -Im(z_1 + z_2) = -(Im(z_1) + Im(z_2)) =$$

$$-Im(z_1) - Im(z_2)$$

$$Im(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = Im(\overline{z_1}) + Im(\overline{z_2}) = -Im(z_1) - Im(z_2)$$

הגענו לשוויון.
2. כיפליות הצמוד:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

הוכחה: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} =$$

$$(ac-bd)-(ad+bc)i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{a+bi} \cdot \overline{c+di} = (a-bi)(c-di) =$$

$$(ac-bd)-(ad+bc)i$$

.3

$$z + \overline{z} = 2Re(z)$$

$$(a+bi)+(a-bi) = 2a$$

.4

$$z - \overline{z} = 2Im(z)i$$

$$(a+bi)-(a-bi) = 2bi$$

5. מספר מרוכב z הוא ממשי אמ"ם

$$z = \overline{z}$$

הוכחה: אם z ממשי אז $z = a + 0i$, ולכן $\overline{z} = a - 0i = a + 0i$.
בכיוון השני, אם $z = \overline{z}$, אז יש להם אם אותו חלק ממשי וחלק מדומה.

$$Im(z) = Im(\overline{z}) = -Im(z)$$

ולכן

$$Im(z) = 0$$

וזה אומר שz ממשי.
6. מספר מרוכב z הוא מדומה טהור אמ"ם הוכחה:

$$\overline{z} = -z$$

הוכחה: כיוון ראשון, נניח שz מדומה טהור. אז $0 = Re(z)$. $z = 0 + bi$. $\overline{z} = 0 - bi$, ולכן $\overline{z} = -z$
כיוון שני: נתון $\overline{z} = -z$. לכן:

$$Re(z) = Re(\overline{z}) = Re(-z) = -Re(z)$$

קיבלנו ש $Re(z) = -Re(z)$ ולכן $Re(z) = 0$.
לכן z מדומה טהור.
הגדרה: נורמה (ערך מוחלט).
הנורמה של מספר מרוכב זה המרחק של המספר מראשית הצירים. מסמנים: $|z|$.
איך מחשבים את הנורמה?
נניח ש$z = a + bi$. אז הנקודה שלו במישור מתאימה לנקודה (a, b). כלומר, צריך לחשב את המרחק של (a, b) מ$(0, 0)$. וזה מחושב ע"י הנוסחא

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

דוגמא:

$$|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|-3 - 4i| = 5$$

תכונות:
0. נורמה של מספר מרוכב היא תמיד מספר ממשי אי שלילי.
1. $|z| = |\overline{z}|$.
הוכחה: נכתוב $z = a + bi$
אז $\overline{z} = a - bi$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. כפליות הנורמה:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

הוכחה: נסמן

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$$

$$|z_1 z_2| = |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| =$$

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=$$

$$\sqrt{a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2}=$$

$$\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$|z_1||z_2|=|a+bi||c+di|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=$$

$$\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

3. אי שוויון המשולש: יהיו z_1, z_2 מספרים מרוכבים.

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

הוכחה: נסמן $z_1=a+bi, z_2=c+di$

$$|z_1+z_2|=|(a+bi)+(c+di)|=|(a+c)+(b+d)i|=$$

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=\sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2}$$

$$|z_1|+|z_2|=|a+bi|+|c+di|=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

בעצם אנחנו צריכים להוכיח:

$$\sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

מכייון ששני האגפים אי שליליים, אם נוכיח שהריבועים שלהם בסדר שאנחנו רוצים, זה יעיד גם על האי-שוויון המקורי.
נעלה בריבוע:

$$a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2\le a^2+b^2+$$

$$2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$$

נצמצם גורמים משותפים ונקבל:

$$2ac + 2bd \leq 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

נחלק ב2:

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

נשים לב שאגף ימין הוא תמיד אי שלילי.

1. אם אגף שמאל הוא שלילי- סיימנו. האי שוויון מתקיים.
2. אם אגף שמאל הוא אי שלילי, נעלה את שני האגפים בריבוע והאי שוויון נשמר.

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$2acbd \leq a^2d^2 + b^2c^2$$

$$0 \leq a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 = (ad-bc)^2$$

מתקיים.
מש"ל.
.4

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

הוכחה: נסמן $z = a + bi$. $\overline{z} = a - bi$. ולכן

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

בפרט, $z \cdot \overline{z}$ הוא תמיד מספר ממשי.
נחזור לפעולת החילוק.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2})$$

וזה יתן לנו מספר מהצורה התקנית של המרוכבים. כלומר, ממשי ועוד ממשי כפול i.
דוגמאות:
.1

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

.2

$$\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

.3

$$\frac{3-i}{4+2i}=\frac{(3-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{10-10i}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

משוואות ריבועיות:

1. פתרון את המשוואה $z^2=i$.

כלומר, מחפשים מספר מרוכב שכשנעלה אותו בריבוע נקבל i.

פתרון: נציב $z=a+bi$.

ונתון

$$(a+bi)^2=i$$

$$a^2+2abi-b^2=i$$

נשווה חלקים ממשיים ומדומים:

$$a^2-b^2=0$$

$$2ab=1$$

נחלץ מהמשוואה השניה:

$$b=\frac{1}{2a}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$a^2-\frac{1}{4a^2}=0$$

$$\frac{4a^4-1}{4a^2}=0$$

$$4a^4-1=0$$

$$a^4 = \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \pm\frac{1}{2}$$

לכן

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

יש שני פתרונות:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}i, -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i$$