שיעורי בית 4

1. ב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית נגדיר $W = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

מצאו בעזרת גרם שמידט בסיס אורתונורמאלי ל W.

פתרון : נסדר את הבסיס של W כך : $\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ונפעיל גרם שמידט:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \tfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 &= v_3 - \tfrac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \tfrac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{3/2}{6/4} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ננרמל את הוקטורים ונקבל

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס או"נ ל W.

2. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x) = x, g(x) = x^2 + 4x - 3$ חשבו את $\langle f, g \rangle$.

פתרון : לפי הגדרה

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(i)g(i) = 0^2 \cdot \left(0^2 + 4 \cdot 0 - 3\right) + 1^2 \cdot \left(1^2 + 4 \cdot 1 - 3\right) + 2^2 \cdot \left(2^2 + 4 \cdot 2 - 3\right) = 2 + 36 = 38$$

(ב) מצאו בסיס או"נ ל V.

פתרון : נפעיל גרם שמידט על $B=\left\{1,x,x^2\right\}$ בסיס של V:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= x-\frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}1 = x-\frac{3}{3} = x-1 \\ w_3 &= x^2-\frac{\left\langle x^2,x-1\right\rangle}{\|x-1\|^2}(x-1)-\frac{\left\langle x^2,1\right\rangle}{\|1\|^2}1 = \\ &= x^2-\frac{4}{2}(x-1)-\frac{5}{3} = x^2-2x+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. תהא $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x)\mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D- אינווראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

פתרון:

יהא W ת"מ D- איוואראנטי שונה מאפס. יהא $p(x)\in D$ בעל הדרגה המקס', נסמנה d. כיוון ש Wהוא D - אינוואראנטי אזי $p'(x)\in W$ $=D(p(x))$ וגם $D^2(p(x))=p"(x)\in W$ ובאופן דומה לכל $0\le i\le d$ מתקיים כי

$$D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\in W$$

כאשר $p^{(i)}(x)$ פירושו הנגזרת ה i- ית של $p(x)$. כיוון ש $p(x)$ מדרגה d נקבל כי $D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\neq 0$ לכל $0\le i\le d$. ולכן מצאנו $\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^d\subseteq W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ קבוצה בת"ל. כיוון ש

$$d+1=\dim span\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^d\le\dim W\le\dim\mathbb{R}_d[x]=d+1$$

נקבל כי $W=\mathbb{R}_d[x]$ (כי $W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ מאותו מימד).

בנוסף כיוון ש $\mathbb{R}_d[x]$ לכל $0\le d\le n$ הוא ת"מ D- אניוואראנטי נקבל שאלו כל ת"מ ה D- אינוואראנטים היחידים (עם תת מרחב האפס).

4. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או"נ. נגדיר מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי $P^tP=I$

פתרון : מחישוב ישיר

$$[P^tP]_{i,j}=v_i^t\cdot v_j=\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר $P^tP=I$

(ב) הוכיחו $det(P)\in\{\pm1\}$
פתרון : מכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\left|P^t\right|\cdot|P|=|I|=1$$

כיוון ש $|P^t|=|P|$ נקבל $1=|P|^2$ וכיוון ש $|P|$ מספר ממשי נסיק כי $|P|\in\{\pm1\}$

5. נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+y+3z$$

ונגדיר קבוצה $\subseteq$ $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^3:\ \|v\|=1\right\}$ $\mathbb{R}^3$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v\in S}f(v)$$

[רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v)=\left\langle v,\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$]

פתרון : לפי קושי שוורץ במרחב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלארית ו- $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ נקבל ש

$$2x+y+3z=|\langle v,u\rangle|\le\|v\|\cdot\|u\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{14}$$

ולכן עבור $v\in S$ נקבל $2x+y+3z\le\sqrt{14}$ כלומר $\max_{v\in S}f(v)\le\sqrt{14}$. נראה כי מתקיים שיוויון. אכן עבור $t=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ ו $\frac{t}{\|t\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\in S$ מתקיים כי

$$f(\frac{t}{\|t\|})=\left\langle\frac{t}{\|t\|},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\sqrt{14}$$

וסיימנו.

6. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ (עם מ"פ $\langle v,v'\rangle$) ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או"נ הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים כי

$$\langle v,v\rangle=[v]_B^t\cdot[v]_B$$

פתרון : נסמן $\in \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $= [v]_B$ שזה שקול לכך ש $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ ואז

$$\langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j\rangle \overset{(1)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

כאשר מעברים (1) נובעים מתכונות הבסיס של השאלה. וסיימנו.

7. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ. ויהיו S, S_1, S_2 ת"ק של V.

(א) הוכיחו כי אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.
פתרון : יהא $v \in S_2^{\perp}$ אזי $\forall s \in S_2 : \langle v, s\rangle = 0$ בפרט $\forall s \in S_1 : \langle v, s\rangle = 0$ (בגלל ההנחה $S_1 \subseteq S_2$) ולכן $v \in S_1^{\perp}$.

(ב) הוכיחו כי $[span(S)]^{\perp} = S^{\perp}$
פתרון : בכיוון $(\subseteq)$ כיוון ש $S \subseteq span(S)$ + הסעיף הקודם.
בכיוון $(\supseteq)$ יהא $v \in S^{\perp}$ אזי $\forall s \in S : \langle v, s\rangle = 0$. צ"ל כי : $\forall u \in span(S)$ $\langle v, u\rangle = 0$ יהא $u = \sum \alpha_s \cdot s$ צ"ל סופי של איברי S אזי

$$\langle v, u\rangle = \left\langle v, \sum \alpha_s \cdot s \right\rangle = \sum \bar{\alpha_s} \langle v, s\rangle = \sum \bar{\alpha_s} 0 = 0$$

כנדרש.