תרגול 5 - רמזים והדרכות

1. הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולי ו $A\subseteq X$ תת קבוצה.. נגדיר את הטופולוגיה על A המושרית מ X להיות $\tau_A=\{A\cap O: O\in\tau\}$. הזוג (A,τ_A) נקרא תת מרחב טופולוגי של (X,τ).
דוגמא: $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$, הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה האוקלידית. אזי תת המרחב $A=[0,1)$ הוא הקבוצה A עם הטופולוגיה $\tau_A=\{[0,1)\cap O:\ O\in\tau_{\mathbb{R}}\}$ ולכן למשל $[0,\frac{1}{2})$ פתוח ב A, כחיתוך של $[0,1)$ עם $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ״מ ו τ המטריקה המושרית. תהא A תת קבוצה. הוכיחו כי המטריקה המצומצת ל A משרה את הטופולוגיה המושרית מ τ. כלומר O פתוחה ב A מבחינה מטרית אמ״מ היא פתוחה מבחינה טופולוגית.
פתרון: עבור $a\in A$נסמן: $B^X(a,r)=\{x\in X|d(x,r)<r\}$, ו$B^A(a,r)=\{x\in A|d(x,a)<r\}$. נשים לב שלכל $a\in A$ מתקיים כי $B^A(a,r)=B^X(a,r)\cap A$. העזרו בעובדה זות וכן בעובדה שבמרחב מטרי קבוצה פתוחה אמ"ם היא איחוד של כדורים פתוחים.

3. תרגיל: יהא X מ״ט ו A תת מ״ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אמ"ם קיימת קבוצה סגורה S' ב X כך ש $S=A\cap S'$.
פתרון: ישירות מהגדרה (קבוצה סגורה היא משלים של קבוצה פתוחה)

4. תרגיל: יהא X מ״ט ו A תת מ״ט. הוכיחו כי פונקצית ההכלה $f:A\to X$ רציפה. (תזכורת, פונקציית ההכלה $f:A\to X$ היא הפונקציה שמקיימת $f(a)=a$. זוהי לא פונקציית הזהות מכיוון שהתחום והטווח שלה אינם שווים.)
הוכחה: השתמשו בקריטריון השקול על כך שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

5. תרגיל: תהא $f:X\to Y$ פונקציה. הוכיחו כי $f:X\to Y$ רציפה אמ״מ $f:X\to Im(f)$ רציפה.
הוכחה: העזרו בעובדה הבאה: לכל $V\subseteq Y$ מתקיים כי $f^{-1}[V\cap Im(f)]=f^{-1}[V]\cap f^{-1}[Im(f)]=f^{-1}[V]\cap X=f^{-1}[V]$.

6. יהיו X וY מרחבים טופולוגיים, ו$\{O_i\}$ כיסוי פתוח של X. כלומר, הקבוצות O_i פתוחות, ו$X=\bigcup O_i$. נניח שיש פונקציות רציפות $f_i:O_i\to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. כלומר, לכל i,j,

$$f_i|_{O_i\cap O_j}=f_j|_{O_i\cap O_j}$$

אז הן מגדירות פונקציה $f:X\to Y$ בדרך אחת. כלומר, לכל $x\in X$, קיים O_i כך ש$x\in O_i$. נגדיר $f(x)=f_i(x)$. נשים לב שזה מוגדר היטב. כלומר, אם בנוסף $x\in O_j$

אחר, אז $f_i(x)=f_j(x)$.
טענה: הפונקציה הנ"ל רציפה.
הוכחה: תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. לפי הגדרת f, $f^{-1}(U)=\bigcup f_i^{-1}(U)$. כעת, מכיוון שלכל i $f_i:O_i\to Y$ רציפה, אז $f_i^{-1}(U)$ פתוחה בO_i. שימו לב שזה לא מספיק, כי קבוצה שפתוחה בתת מרחב, לא בהכרח פתוחה במרחב כולו!). כעת השתמשו בעובדה שהכיסוי מורכב מקבוצות פתוחות.

7. תרגיל המשך: אותו דבר נכון גם עבור כיסוי סופי של Xע"י קבוצות סגורות. כלומרת אם $C_1,...,C_n$ קבוצות סגורות בX, ויש $f_i:C_i\to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוכים, אז הפונקציה היחידה $f:X\to Y$ שהן מגדירות, רציפה.
הוכחה: נעזר בתנאי השקול לרציפות ע"י כך שתמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה. מכאן ההוכחה דומה להוכחה של התרגיל הקודם, תוך שימוש בעובדה שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:
   (א) T_0 אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1\in U$ ו $x_2\notin U$ או להיפך.
   (ב) T_1 אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1\in U$ ו $x_2\notin U$. (שימו לב שזה אומר שקיימת גם V פתוחה כך ש $x_2\in V$ ו $x_1\notin V$)
   (ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימות U_1 וU_2 פתוחות כך ש $x_1\in U_1,x_2\in U_2$ ו- $U_1\cap U_2=\emptyset$.
   (ד) T_3 אם הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x\notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x\in U_1,S\subseteq U_2$.
   (ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות. כלומר, לכל S_1,S_2 סגורות, קיימות U_1,U_2 קבוצות פתוחות וזרות כך ש$S_1\subseteq U_1,S_2\subseteq U_2$.
2. הערה: התכונות בסדר חוזק עולה. כלומר, כל מרחב שהוא T_i, הוא בהכרח גם T_{i-1}, וכן הלאה באינדוקציה.
3. דוגמאות:
   (א) כל מ"מ הוא T_4 (ולכן כל T_i), למשל $\mathbb{R}$ למשל (X,disc).
   (ב) $X=\{a,b\}$ שרפינסקי $\tau=\{\{a\},X,\emptyset\}$ הוא T_0 בלבד. (לa יש קבוצה פתוחה סביבו שלא מכילה את b, אבל לb אין קבוצה פתוחה סביבו שאינה מכילה את a).
   (ג) $(X,\tau_{co-finite})$ כאשר X אינסופית. הוא T_1 אך לא T_2.
   הסבר: יהיו $x_1,x_2\in X$. $U_2=\{x_1\}^c$ היא קבוצה פתוחה (כי המשלים שלה סופי) שמקיימת $x_2\in U,x_1\notin U$. כמו כן, $U_1=\{x_2\}^c$ היא קבוצה פתוחה שמקיימת $x_1\in U,x_2\notin U$.
   היא לא T_2 כי אחרת, בפרט קיימות U_1,U_2 פתוחות זרות. נקבל $X=\emptyset^c=(U_1\cap U_2)^c=U_1^c\cup U_2^c$. סתירה, כי איחוד של קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.
   (ד) $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עם $\tau=\{O:p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$ הוא T_2 כי לכל $x_1\neq x_2$: בה"כ x_1 ממשי ואז $\{x_1\},\{x_1\}^c$ יעשו את העבודה.

(ה) הוא גם T_3 כי: תהא S סגורה ו $x \notin S$ אם $x \neq p$ אזי $\{x\}^c, \{x\}$ פתוחות יפרידו ביניהם. אם $x = p$ אזי S גם פתוחה ו S^cפתוחה לפי הגדרה.

(ו) הוא T_4 כי יהיו S_1, S_2 סגורות זרות. אם p לא שייך לאף אחת אזי S_1, S_2 גם פתוחות. אחרת, בה״כ $p \in S_1$ ואז S_2 פתוחה ומהשלים שלה פתוח לפי הגדרה $S_1 \subseteq S_2^c$.

4. תרגיל: כל מרחב טופולוגי סופי ו T_1 הוא דיסקרטי.

פתרון: מ״ל שכל הנקודונים פתוחים. בטאו כל נקודון כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות.

5. בכל מרחב X שהוא T_2 מתקיים: לכל סדרה מתכנסת הגבול יחיד

פתרון: דומה להוכחה שראיתם עבור מרחבים מטריים.

6. תרגיל: האם ההפך הנכון? כלומר, אם לכל סדרה יש גבול יחיד, האם המרחב בהכרח T_2?

פתרון: לא, הוכיחו שהמרחב הבא הוא דוגמא נגדית: X אינסופי לא בן מניה עם הטופולוגיה הקו-מניתית המוגדרת ע״י: $\tau = \{O : |O^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$.

7. תרגיל: X הוא T_1 אמ״מ כל נקודון סגור.

פתרון: השתמשו בשקילות של: נקודון סגור= המשלים שלו פתוח.