(1) 08.12.13
פונקציונלית
הרצאה 8

פונקציות פשוטות

פונקציה מדידה f נקראת <u>פשוטה</u> אם היא מקבלת מספר בן מניה (או סופי) של ערכים.

<u>פונקציה פשוטה</u> ניתן לרשום כ: $f(x)=\sum_n 1_{B_n}(x)\, y_n$. $\{y_n\}$ הערכים האפשריים של f.

$$1_{B_n}(x)=\begin{cases}1 & x\in B_n\\ 0 & else\end{cases}$$

כאשר B_n זרות בזוגות ו y_n שונים

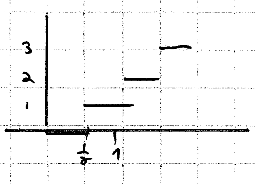
לפונ' פשוטה צריך לדרוש:
1. מס' בן מניה של ערכים
2. המקור של כל y יהיה מדיד

$$B_n=f^{-1}(\{y_n\})=\{x: f(x)=y_n\}$$

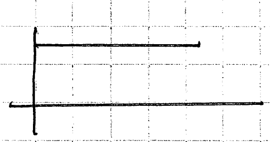
<u>טענה:</u> אם y_n $f=\sum 1_{B_n} y_n$ פונקציה ו B_n מדידות, אז f פשוטה

הטענה לא נכונה

[לא חייבים לדרוש ש B_n זרות או y_n שונים]



$$0\cdot 1_{[0,\frac12]}+1\cdot 1_{[\frac12,1]}+2\cdot 1_{[1,1.5]}$$



$$1\cdot 1_{[0,1]}=1_{[0,\frac12]}+\underbrace{\frac12\cdot 1_{[\frac12,1]}+\frac12\cdot 1_{[\frac12,1]}}_{\text{אותו } y_n \text{ + חפיפה}}$$

<u>הוכחה:</u> [נרצה לעבור לצורה הקנונית]

[אם B_n היו זרות - לא הייתה בעיה עם המקור של כל קבוצה מדיד]
עלול להיות בעיה עם מס' בן מניה של ערכים.
ראינו שאפשר לחתוך בין ספרות של מס' ממשים ל 0 ו 1..

נגדיר:
כל המס' בקטע $[0,1)$ שהפיתוח הבינארי יש
להם 1 במקום ה n. B_n קבוצה מדידה
נגדיר ערכים: $y_n=\frac{1}{2^n}$

$$B_n=\{0.xxxx\ldots\underset{\text{מקום } n}{1}xxx\ldots\}$$

$$B_1=[\tfrac12,1]$$

$$B_2=[\tfrac14,\tfrac12]\cup[\tfrac34,1]$$

$$f(x)=\sum 1_{B_n}(x)\, y_n$$

$$x=0.\underset{B_1}{1}\underset{B_2}{1}\underset{B_3}{0}\underset{B_n}{1}0$$

$$f(x)=\frac12+\frac14+0\cdot\frac18+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

$$x=\frac12 \Rightarrow x=0.100\ldots \xrightarrow[B_1\text{ ל}]{x=\frac12 \text{ שייך}} f(\tfrac12)=\frac12$$

$$f(x)=x \quad \forall x\in[0,1]$$

לא מס' בן מניה של ערכים
לכן לא פונקציה פשוטה

(2) 08.12.13

מד פונקציות
הרצאה 8

טענה: פונקציה f שמקבלת מספר בן מניה של ערכים שונים $\{y_n\}$ היא מדידה אמ"מ $A_n = f^{-1}\{y_n\}$ מדידות

הוכחה:
נניח ש f מדידה, כלומר ש $f^{-1}(-\infty, c)$ מדידה לכל c
(ההגדרה של פונק' מדידה ~ המקור של כל קבוצת בורל היא מדידה. הייתה טענה שאומרת שמספיק לבדוק את הקרניים. נראה שמספיק כאן לבדוק רק את המקור של נקודות [יחידונים])

לכל קבוצה A

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n: y_n\in A} f^{-1}(\{y_n\})$$

אפשר לסכם את כל הקטעים שנמצאים ב A וזה ייתן את הקבוצה A.

$\Downarrow$

$$\{x: f(x)\in A\} = \bigcup_{n: y_n\in A} \underbrace{\{x: f(x)=y_n\}}_{f^{-1}(\{y_n\})}$$

מספיק לבדוק את המקור של B קבוצת בורל אפשר לבדוק את המקור של כל קטע

משפט: פונקציה f היא מדידה אמ"מ היא גבול במידה שווה של פונקציות פשוטות

הוכחה:
- הראינו שגבול של פונקציות מדידות הוא מדיד. בפרט, גבול של פשוטות הוא מדיד
- כיוון שני - לכל n נגדיר $f_n(x) = \frac{m}{n}$ רק ש: $\frac{m}{n} \le f(x) \le \frac{m+1}{n}$

אז $0 \le f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n}$.

בפרט $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

אינטגרל לבג לפונקציות פשוטות במרחב מידה סופי

תהי f פונקציה פשוטה שמקבלת את הערכים $y_1, \dots, y_n$ ובנוסף כאשר $i\neq j$ $y_i \neq y_j$

הפונקציה f תקרא אינטגרבילית על A אם $\sum \mu(A_n)|y_n| < \infty$ כאשר $A_n = \{x\in A: f(x)=y_n\}$ ו A קבוצה מדידה. האינטגרל של f מוגדר כסכום:

$$\boxed{\int_A f(x)\,d\mu = \sum \mu(A_n)\, y_n}$$

כל הנק' מ A_n שמוגדרות ל A_n, כלומר הערך (מוש') של y_n

דוגמא: $D(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ רציונלי} \\ 1 & x \text{ אי רציונלי} \end{cases}$ לא אינטגרבילית רימן אבל כן אינטגרבילית לבג. ב $[0,1]$

(באינטגרל לבג, מה שמעניין זה קבוצות ממידה 0 לא משנות)
האינטגרל של פונק' זו הוא באינטגרל לבג "כמו" לחשב אינטגרל של קבוע בקטע

$$D(x) = 1\cdot \underbrace{1}_{[\text{אי רציונלים}]} + 0\cdot \underbrace{1}_{[\text{רציונלים}]}$$

קבוצה בת מניה ← המידה היא 0

$$[0,1] = \underbrace{[[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})]}_{\text{אי רציונלים}} \cup \underbrace{[[0,1]\cap\mathbb{Q}]}_{\text{רציונלים}} \Rightarrow \mu([0,1]) = \overbrace{\mu(\quad)}^{\text{זהו מה שנשאר} = 1} + \overbrace{\mu(\quad)}^{0} = 1$$

(3) 08.12.13

אז סוף
תרגול 8

הגדרת האינטגרל! $\int_A f(x)\,d\mu = \sum \mu(A_n)\cdot y_n$

בדרישה שהטור יתכנס בהחלט,
כי אז הסכום לא תלוי בסדר הסכימה
(אנחנו לא רוצים שתוצאות האינטגרל תהיה תלויה בסדר הסכימה

__למה!__ $A = \bigcup_k B_k$ (איחוד בן מנייה), $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$ (זרות בזוגות)

ונניח ש-f מקבלת על כל B_i רק ערך אחד c_i. (הפונ' קבועה ב-B_i)
(f מדידה.

אז f אינטגרבילית אמ"מ $\sum \mu(B_i)|c_i| < \infty$ ואז $\int_A f\,d\mu = \sum \mu(B_i) c_i$

החידוש
השונה - ה c_i לא חייבים להיות שונים.
(קודם הגדרתי את ה-y_n שונים, כאן שונה להגדיר את A כפונ' המקור לפי)
כלומר, מה שחשוב הוא שהקבוצות זרות.

__הוכחה!__ $\{x : f(x) = c\} = \bigcup_{i : c_i = c} B_i$

להשלים...

תזכורת $\mu(A) < \infty$

__חשבון אינטגרלים לפונקציות פשוטות__

יהיו f ו-g פונקציות פשוטות אינטגרביליות [על A]

א. $f+g$ אינטגרבילית $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$

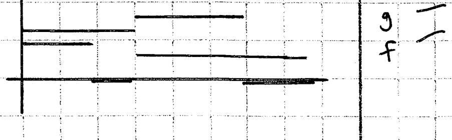
ב. לכל קבוע k: $\int_A kf\,d\mu = k\int_A f\,d\mu$

ג. אם f חסומה על A $|f(x)| < M$ $\forall x \in A$ אז f אינטגרבילית $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq M\mu(A)$!

(אם הפונ' מדידה וחסומה ⇐ אינטגרבילית (לבד)

__הוכחה:__ א. $f = \sum 1_{F_i} c_i$, $g = \sum 1_{G_i} d_i$ F_i זרות בזוגות
G_i זרות בזוגות
!: $A = \bigcup_i F_i = \bigcup_j G_j$

מתוך הלמה! $\int_A g\,d\mu = \sum d_i \mu(G_i)$, $\int_A f\,d\mu = \sum c_i \mu(F_i)$



$F_i = \bigcup_j (F_i \cap G_j)$, $G_j = \bigcup_i (F_i \cap G_j)$

נסתכל על $\{F_i \cap G_j\}_{i,j}$. על $F_i \cap G_j$, $f+g$ קבועה
ומקבלת את הערך $c_i + d_j$ ⇐ $f+g$ פשוטה.

נסתכל על הטור שמתאים לתפוקה: $\underbrace{\sum_{i,j} \mu(F_i \cap G_j)|c_i + d_j|}_{(*)}$. נרצה להראות שהטור
קטן מ-∞.

(4) 08.12.13

פונקממ׳

הרצאה 8

$$\sum_{i,j}\mu(F_i\cap G_j)|c_i+d_j| \le \underbrace{\sum_{i,j}\mu(F_i\cap G_j)|c_i|}_{①} + \sum_{i,j}\mu(F_i\cap G_j)|d_j|$$

$$① \quad \sum_{i,j}\mu(F_i\cap G_j)|c_i| = \sum_i\sum_j\mu(F_i\cap G_j)|c_i| = \sum_i|c_i|\sum_j\mu(F_i\cap G_j)$$

$$= \sum_i|c_i|\mu\Big(\bigcup_j F_i\cap G_j\Big) = \sum_i|c_i|\mu(F_i) < \infty$$

אינטגרבילי

לפי הטור (*) מתכנס, כלומר: $\sum_{i,j}\mu(F_i\cap G_j)(c_i+d_j)$ מתכנס בהחלט

ולכן מותר לשנות סדר סכימה:

$$\sum\mu(F_i\cap G_j)(c_i+d_j) = \sum_i\sum_j\mu(F_i\cap G_j)c_i + \sum_j\sum_i\mu(F_i\cap G_j)d_j$$

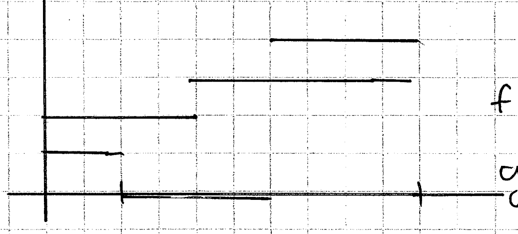
$$= \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$$

אינטגרל הסכום הוא סכום האינטגרלים

ב. הוכחתו באופן דומה. (קיימת כבר פונ׳ פשוטה f)

ג. נשתמש בעובדה ש: $\sum\mu(F_i)|c_i| \le \sum\mu(F_i)\cdot M$

$$= \mu(A)\cdot M < \infty$$



$f \quad F_1=[0,2] \quad F_2=[2,5) \quad c_1=2 \quad c_2=3$

$g \quad G_1=[0,1] \quad G_2=[1,3) \quad G_3=[3,5] \quad d_1=1 \quad d_2=0 \quad d_3=4$

הגדרת אינטגרל לבג לפונקציות מדידות כלליות

הגדרה! נגיד שפונקציה מדידה f היא אינטגרבילית על A אם קיימת סדרת פונקציות פשוטות אינטגרביליות f_n כך ש $f_n \xrightarrow[\text{במ״מ}]{} f$.

אז נגדיר: $\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$

כדי להראות שההגדרה טובה צריך להראות ש $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$ קיים ולא תלוי בבחירת הפונקציות f_n.

כמו כן, נרצה להראות שעבור פונקציות פשוטות זו אותה הגדרה

כלומר צ״ל:

א. $\lim\int_A f_n\,d\mu$ קיים

ב. הגבול לא תלוי בבחירת f_n

ג. שאם f פשוטה זו אותה הגדרה

(5) 8.12.13

פונקציונלית
הרצאה 8

<u>הוכחה:</u>

א. יהיו $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$, כלומר:

בהינתן $\varepsilon>0$ קיים N כך ש $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in A$, $n>N$

ולכן (תנאי קושי) לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall m,n>N$

(עברנו ל f_n ו f_m (ולא f) כי
אנחנו עוד לא יודעים על f עדיין
שהיא אינטגרבילית)

$$\left|\int_A f_n\,d\mu-\int_A f_m\,d\mu\right| = \left|\int_A f_n(x)-f_m(x)\,d\mu\right| \underset{\text{[illegible]}}{<} \varepsilon\mu(A)$$

$\Downarrow$

$\{\int_A f_n\,d\mu\}$ סדרת קושי (ב $\mathbb{R}$) ולכן מתכנסת

ב. נניח בשלילה ש $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$, ו $g_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

נסתכל על הסדרה: $f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, \dots \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

לכן מא', הגבול של האינטגרלים קיים לסדרה השזורה ו

לכן $\lim \int_A f_n\,d\mu = \lim \int_A g_n\,d\mu$ הגבול של תתי הסדרות זהה

ג. בפשטות ניקח $f_n \equiv f$ $\forall n$

<u>תכונות של אינטגרל לבג</u> (פשוטות מביאות)

1. $\int_A 1\,d\mu = \mu(A)$

2. $\int_A kf\,d\mu = k\int_A f\,d\mu$ k קבוע

הוכחה: ניקח $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ פשוטות

$\Leftarrow$ $kf_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} kf$

• ולכן $\int_A kf_n\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_A kf\,d\mu$ * (בגבול פשוטות)

עבור פשוטות
ניתן להוציא
את הקבוע
מחוץ לאינטגרל • $k\int_A f_n\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} k\int_A f\,d\mu$ **

ולכן (*) = (**)

⑥ 8.12.13
פונ'
הרצאה 9

.3 $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$

ניקח $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} g$, f_n, g_n אינטגרביליות

$f_n+g_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f+g$

$$\int_A (f+g)\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A (f_n+g_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_A f_n\,d\mu + \int_A g_n\,d\mu\right)$$

.4 אם f חסומה על A , f אינטגרבילית אם $|f|\le M$ על A

$\left|\int_A f\,d\mu\right| \le M\mu(A)$

.5 מונוטוניות: אם $f\ge 0$ אז $\int_A f\,d\mu \ge 0$ ואינטגרבילית

<u>הוכחה:</u> אפשר לקרב את f ע"י פונ' פשוטות חיוביות , $f_n\ge 0$, $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

עבור f_n , מההגדרה $\int_A f_n\,d\mu \ge 0$

.6 אם $f(x)\ge g(x)$ אז $\int_A f(x)\,d\mu \ge \int_A g(x)\,d\mu$ (כי $f-g\ge 0$)

.7 אם $\mu(A)=0$ אז $\int_A f\,d\mu = 0$ לכל f

.8 אם $f\sim g$ (שקולות) כלומר $f(x)=g(x)$, פרט לקבוצה ממידה 0 , אז

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

(נסתכל על $f-g$ ונקרב ע"י פונ' פשוטות)

.9 $\int_A f(x)\,d\mu$ ו- $\int_A |f(x)|\,d\mu$ קיימים או לא קיימים ביחד

.10 אם φ אינטגרבילית מעל A ו- $|f(x)|\le|\varphi(x)|$ $\forall x\in A$

ו- f מדידה אז f אינטגרבילית מעל A.