לינארית 1 - תרגיל 9 - תאורטי 3

להגשה בשבוע של ה-24.12.17

תרגיל 1. האם V הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$

1. $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ z^2\geq x^2+y^2\right\}$

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\left(\begin{array}{c}1\\1\\7\end{array}\right)\in V,\ u=\left(\begin{array}{c}1\\1\\-7\end{array}\right)\in V$$

אך החיבור

$$u+v=\left(\begin{array}{c}1\\1\\7\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}1\\1\\-7\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}2\\2\\0\end{array}\right)\notin V$$

2. $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ 2^{3x+z}=8^{2x-y}\right\}$

פתרון.

תת מרחב, ראשית נשים לב ש-

$$\begin{gathered}2^{3x+z}=8^{2x-y}\\\Updownarrow\\2^{3x+z}=8^{6x-3y}\\\Updownarrow\\3x+z=6x-3y\\\Updownarrow\\3x-3y-z=0\end{gathered}$$

לכן $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ 3x-3y-z=0\right\}$.

יהיו $u=\left(\begin{array}{c}u_1\\u_2\\u_3\end{array}\right)\in V,v=\left(\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\end{array}\right)\in V,\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$u+\alpha v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+\alpha v_1\\u_2+\alpha v_2\\u_3+\alpha v_3\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}&3\left(u_1+\alpha v_1\right)-3\left(u_2+\alpha v_2\right)-\left(u_3+\alpha v_3\right) &=\\ &3u_1-3u_2-u_3+\alpha\left(3v_1-3v_2-v_3\right) &=\\ &0+\alpha\cdot 0 &=\\ &0\end{aligned}$$

לכן $u+\alpha v\in V$

תרגיל 2. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משווים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.

1. $\mathbb{R}^3\overset{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}2&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&5&12\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^3$.

$\left(0,0,1\right)\notin span\left\{\left(2,0,4\right),\left(0,1,0\right),\left(6,5,12\right)\right\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\left(0,0,1\right)=\alpha\left(2,0,4\right)+\beta\left(0,1,0\right)+\gamma\left(6,5,12\right)$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases}0=2\alpha+6\gamma\\1=4\alpha+12\gamma\end{cases}$$

והדבר לא אפשרי.

2. $\mathbb{R}_3\left[x\right]\overset{?}{=}span\left\{1,x+x^2,4x^3+x^2,2x\right\}$

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}_3\left[x\right]$.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_0\cdot 1+\left(a_2-\tfrac{1}{4}a_3\right)\cdot\left(x+x^2\right)+\tfrac{1}{4}a_3\cdot\left(4x^3+x^2\right)+\left(\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_3+\tfrac{1}{8}a_3\right)\cdot\left(2x\right)$$

3. $\mathbb{R}^{2\times 2}\overset{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\notin span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0=\alpha+\beta+5\delta \\ 0=2\alpha-\beta+\gamma+3\delta \\ 0=\alpha-\beta+\gamma+3\delta \\ 1=2\alpha+\beta+5\delta \end{cases}$$

והדבר לא אפשרי (מוזמנים לפתור ולבדוק).

תרגיל 3.

הצג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

כצירוף ליניארי של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון.

צריך למצוא $\alpha\beta\gamma\delta \in \mathbb{R}$כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

וזה שקול לפתור את המערכת

$$\begin{cases} 1\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=30 \\ 2\alpha+3\beta+4\gamma+1\delta=24 \\ 3\alpha+4\beta+1\gamma+2\delta=22 \\ 4\alpha+1\beta+2\gamma+3\delta=24 \end{cases}$$

ואחרי פתרון המערכת נקבל ש-

$$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3,\quad \delta=4$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4.

יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U=\{p(x)\in V \mid p(x)=x\cdot p'(x)\}$$

תת קבוצה של V. ($p'(x)$היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש-U תת מרחב של V.

פתרון.

- שייכות של ווקטור ה-0: יהי $0(x)$פולינום ה-0 והוא מקיים $0(x)=x\cdot 0'(x)$ לכן $\{0(x)\}\in U$

- סגירות: יהי $p(x), q(x) \in U$ פולינומים מקיימים $p(x) = x \cdot p'(x)\,,\ q(x) = x \cdot q'(x)$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$p(x)+\alpha q(x) = x\cdot p'(x)+\alpha x\cdot p'(x) = x\cdot(p'(x) + \alpha \cdot p'(x)) = x\cdot(p(x) + \alpha \cdot p(x))'$$

מכאן $p(x) + \alpha q(x) \in U$ ולכן Uהוא תת מרחב של V

2. מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון.

$$\begin{aligned} U &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = x \cdot \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)\right\} &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = bx + 2cx^2 + 3dx^3\right\} &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a = 0, c = 0, d = 0\right\} &= \\ \{p(x) = bx :\ b \in \mathbb{R}\} &= \\ Span\{x\} & \end{aligned}$$

המימד הוא 1

תרגיל 5.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ חשבו

1. $R(A)$
2. $C(A)$
3. $N(A)$
4. $R(B)$
5. $C(B)$
6. $N(B)$

פתרון. נדרג את המטריצה A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$R(A) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות שבהן יש איברים מובילים כלומר

$$C(A) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

ולסיום בסיס למרחב ה-0 הוא

$$N(A) = \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

כעת נעבור ל-Bהיא כבר מדורגת לכן

$$R\left(A\right)=Span\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4\end{array}\right),\left(\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 5\end{array}\right)\right\}$$

בסיס למרחב העמודות הן העמודות שבהן יש איברים מובילים כלומר

$$C\left(A\right)=Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 2\\ 3 \end{array}\right)\right\}$$

ולסיום בסיס למרחב ה-0 הוא

$$N\left(A\right)=\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}t\\ -\frac{5}{3}t\\ t \end{array}\right)\right\} =\left\{ t\left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1 \end{array}\right)\right\} =Span\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1 \end{array}\right)\right\}$$

תרגיל 6. נתונים הווקטורים

$$v_{1}=\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 1 \end{array}\right),v_{2}=\left(\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 2 \end{array}\right),v_{3}=\left(\begin{array}{c} 3\\ 1\\ 4 \end{array}\right),v_{4}=\left(\begin{array}{c} -1\\ 2\\ 1 \end{array}\right),v_{5}=\left(\begin{array}{c} 2\\ -4\\ 1 \end{array}\right)$$

1. השלימו את $\left\{ v_{1},v_{2}\right\}$כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}^{3}$

פתרון. אנחנו צריכים למצוא ווקטור $v\notin sp\left\{ v_{1},v_{2}\right\}$ כדי לעשות זאת בקלות נעבור להצגה של משוואות

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 1 & y\\ 1 & 2 & z \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & z-x \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & z-x-y \end{pmatrix}$$

כלומר

$$sp\left\{ v_{1},v_{2}\right\} =\left\{ \left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)|z-x-y=0\right\}$$

לכן נבחר ווקטור **שלא** מקיים את התנאי הנ"ל למשל $\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 0 \end{array}\right)$.

2. מצאו בסיס ל- $Sp\left\{ v_{1},v_{2},v_{4},v_{5}\right\}$ והשלימו אותו לבסיס ל-$\mathbb{R}^{3}$.

פתרון. נסדר את v_{1},v_{2},v_{4},v_{5} כווקטורי עמודה במטריצה ונמצא בסיס ל-$C\left(A\right)$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בעמודות 1,2,4 , לכן בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות של המטריצה כלומר, בסיס ל- $Sp\left\{ v_{1},v_{2},v_{4},v_{5}\right\}$ הוא $\left\{ v_{1},v_{2},v_{5}\right\}$ וזה כבר בסיס ל-$\mathbb{R}^{3}$.

תרגיל 7. תהי מטריצה $A\in M_{4\times8}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$Rank\left(A\right)=4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון. נתון ש-

$$Rank\left(A\right)=dim\left(R\left(A\right)\right)=4$$

ויש 4 שורות לכן, שורות A בת"ל.

2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון. נתון ש-

$$Rank\left(A\right)=dim\left(C\left(A\right)\right)=4$$

ויש 8 עמודות לכן, עמודות A תל

3. למה שווה $dim\left(N\left(A\right)\right)$?

פתרון. ידוע ש-

$$Rank\left(A\right)+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

לכן

$$4+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

מכאן

$$dim\left(N\left(A\right)\right)=8-4=4$$

תרגיל 8. יהיו $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ ו-$v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

1. הוכיחו שאוסף כל הווקטורים ב-$\mathbb{R}^4$האורתוגונלים לשני הווקטורים האלו הוא תתי מרחב של $\mathbb{R}^4$.

2. מצאו בסיס לתת מרחב הזה.

פתרון. נסמן את אוסף הווקטורים הללו ב-V אז מתקיים

$$\begin{aligned}V &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},v_1\right\rangle=0\wedge\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},v_1\right\rangle=0\right\} =\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\wedge\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\} =\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\{\begin{array}{rcl}x+y+w&=&0\\x+y+z+2w&=&0\end{array}\right.\right\}\end{aligned}$$

כלומר V הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.

כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$V=\left\{\left.\begin{pmatrix}-t-s\\s\\-t\\t\end{pmatrix}\right|t,s\in\mathbb{R}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל 9. נתונים v,u,w אורתונורמלים חשבו את $\|3v+u-2w\|^2$

פתרון. נחשב את הביטוי.

$$\begin{aligned}\|3v+u-2w\|^2 &= \langle 3v+u-2w,3v+u-2w\rangle =\\ &= \|3v\|^2+\|u\|^2+\|-2w\|^2+2\langle 3v,u\rangle+2\langle u,-2w\rangle+2\langle 3v,-2w\rangle =\\ &= 9\|v\|^2+\|u\|^2+4\|w\|^2+6\langle v,u\rangle-4\langle u,w\rangle-12\langle v,w\rangle =\\ &= 9\cdot1+1+4\cdot1+6\cdot0-4\cdot0-12\cdot0 = 14\end{aligned}$$

תרגיל 10. יהיו $x,y\in V/\{0\}$ נגדיר $u=x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}$

1. הוכיחו ש-u ניצב ל-y כלומר $\langle u,y\rangle=0$

פתרון. נראה ש- $\langle u,y\rangle=0$.

$$\begin{aligned}\langle u,y\rangle &= \left\langle x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2},y\right\rangle =\\ &= \langle x,y\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,y\rangle =\\ &= \langle x,y\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\|y\|^2 = 0\end{aligned}$$

2. הוכיחו ש-$\langle u,u\rangle=\langle u,x\rangle$

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= \left\langle u,x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\right\rangle =\\ &= \langle u,x\rangle+\left\langle u,-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\right\rangle =\\ &= \langle u,x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle u,y\rangle =\\ &\quad \langle u,x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\cdot 0 = \langle u,x\rangle\end{aligned}$$

3. הראו ש-$0\le\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$. רמז: נשים לב ש- $0\le\langle u,u\rangle$

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= \langle u,x\rangle &= \\ &= \left\langle x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2},x\right\rangle &= \\ &= \langle x,x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,x\rangle &= \|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\end{aligned}$$

לכן

$$0 \leq \|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

4. הסיקו את אי שיוויון קושי שוורץ.

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{gathered}0\leq\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\\ \Downarrow\\ \|x\|^2\|y\|^2\geq|\langle x,y\rangle|^2\\ \Downarrow\\ \|x\|\,\|y\|\geq|\langle x,y\rangle|\end{gathered}$$

בהצלחה!!