נכתב על ידי יהונתן רגב

החבורה הסימטרית

תזכורת

$$1 \quad \to \quad A_n \quad \hookrightarrow \quad S_n \quad \twoheadrightarrow \quad \{\pm 1\} \quad \to \quad 1$$

תזכורת

מחלקת צמידות מאופיינת על-ידי מבנה מחזורים.

הערה

S_n נוצרת על-ידי מחזורים.

טענה

S_n נוצרת על-ידי החילופים.

הוכחה

מתקיים:

$$(i_1 \ \ i_2) \cdots (i_1 \ \ i_t) \quad = \quad (i_1 \ \ i_t \cdots i_3 \ \ i_2)$$

$$\blacksquare$$

הערה

קיימים $\binom{n}{2}$ חילופים.

הערה

$$\begin{aligned} C_{S_n}\big((1 \ \ 2)\big) \quad &= \quad \langle S_{\{3,\cdots,n\}}, (1 \ \ 2) \rangle \\ &\cong \quad S_2 \times S_{n-2} \end{aligned}$$

ואכן:

$$\frac{n!}{2(n-2)!} \quad = \quad \binom{n}{2}$$

$$\blacksquare$$

מסקנה

לכל $n \geq 3$, מתקיים:

$$Z(S_n) \quad = \quad 1$$

הוכחה

יהי $\sigma \in S_n$.

לכל $1 \leq i,j \leq n$, מתקיים:

$$\sigma \circ (i \ \ j) \circ \sigma^{-1} \quad = \quad \big(\sigma(i) \ \ \sigma(j)\big)$$

אם $\sigma \in Z(S_n)$, אזי לכל $1 \leq i \neq j \leq n$, מתקיים:

$$(i \ \ j) \quad = \quad \big(\sigma(i) \ \ \sigma(j)\big)$$

כלומר:

$$\{i,j\} \quad = \quad \{\sigma(i),\sigma(j)\}$$

נקבע $1 \leq i \leq n$, ונבחר $1 \leq j \neq k \neq i \leq n$.

מתקיים:

$$\{i,j\} \cap \{i,k\} \quad = \quad \{i\}$$

מתקיים:

$$\{\sigma(i),\sigma(j)\} \cap \{\sigma(i),\sigma(k)\} \quad = \quad \{\sigma(i)\}$$

מתקיים:

$$\{i,j\} \cap \{i,k\} \quad = \quad \{\sigma(i),\sigma(j)\} \cap \{\sigma(i),\sigma(k)\}$$

לכן:

$$\sigma(i) \quad = \quad i$$

■

הגדרה

חבורה G היא **פשוטה** אם אין לה תת-חבורות נורמליות שאינן $1, G$.

דוגמה

לכל p ראשוני, החבורה $\mathbb{Z}_p$ פשוטה אבלית.

הערה

נתבונן בחבורות S_5 ו - A_5.

נבנה טבלה:

מבנה מחזורים	סימן	מספר התמורות
$(*)(*)(*)(*)(*)$	$+$	1
$(**)(*)(*)(*)$	$-$	10
$(***)(*)(*)$	$+$	20
$(****)(*)$	$-$	30
$(*****)$	$+$	24
$(**)(**)(*)$	$+$	15
$(***)(**)$	$-$	20

מיהן תת-החבורות הנורמליות של S_5?

כל תת-חבורה נורמלית היא איחוד של מחלקות צמידות.

נקבל כי תת-החבורה הנורמלית היחידה של S_5 היא A_5.

באופן דומה, נקבל כי A_5 פשוטה.

■