

1. תהי A קבוצה לא ריקה. נגדיר $f : A \times P(P(A)) \rightarrow P(A)$ על ידי:

$$f(a, S) = \{x \in A \mid \exists B \in S : x \in B \wedge a \in B\}$$

א. הוכח/הפרך: f על

ב. הוכח/הפרך: f איננה חח"ע

ג. הוכח/הפרך: $f(x, U \cap V) = f(x, U) \cap f(x, V)$

ד. הוכח/הפרך: $f(x, U \cup V) = f(x, U) \cup f(x, V)$

.2

א. תהי A קבוצה. נגדיר יחס R על $P(P(A))$:

$(S, T) \in R$ אם האיחוד הכללי על S מוכל באיחוד הכללי על T

הוכח/הפרך: R יחס סדר חלקי

ב. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה. נביט באוסף $\{S \subseteq A \mid f[S] = f[A]\}$ הסדור חלקית ביחס

ההכלה. האם מתקיימים לגביו תנאי הלמה של צורן לגבי איבר מינימלי? האם קיים איבר מינימלי?

.3

- א. כמה מספרים בעלי 7 ספרות ישנם אשר כל ספרה המופיעה בהם מופיעה לפחות 3 פעמים?
- ב. בכמה דרכים ניתן להגיע מראשית הצירים לנקודה (m, n) ברביע הראשון, כאשר בכל שלב ניתן להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה?
- ג. מטילים 2 קוביות 9 פעמים. בכמה אפשרויות לפחות אחד מהזוגות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$ לא יופיע בהטלות?

4. יהי S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת כל הפונקציות הממשיות), המוגדר על ידי $(f, g) \in S$ אם

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$$

א. (4 נק') הוכיחו כי S יחס שקילות

ב. (8 נק') תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו את $[[f]]$

ג. (8 נק') מצאו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$

א. תהיינה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ו- $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ שתי משפחות של קבוצות.

הוכח:

$$1. \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \text{ (3 נק')}$$

$$2. \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \text{ (3 נק')}$$

הוכח או הפרך:

$$3. \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \text{ (4 נק')}$$

$$4. \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \text{ (4 נק')}$$

ב. הוכח: לכל משפחה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות

$$1. \bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha) = P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \text{ (3 נק')}$$

$$2. \bigcup_{\alpha \in I} P(A_\alpha) \subseteq P\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \text{ (3 נק')}$$

.6

א. תהי A קבוצה אינסופית ונסמן $|A| = a$.

1. (11 נק') נגדיר עבור $2 \leq n \in \mathbb{N}$ את הקבוצה הבאה

$$Y = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bigcup_{i=1}^n X_i = A, X_i \cap X_j = \emptyset \text{ מתקיים } 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

הוכח $|Y| = 2^a$. רמז: התאם לכל n -יה כנ"ל פונקציה $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

2. (5 נק') מצא את $|\mathbb{N} \cup Y|$, את $|\mathbb{N} \times Y|$, את $|\mathbb{N}|^{|Y|}$ ואת $|Y|^{\mathbb{N}}$.

ב. (4 נק') מצא את $|P(\mathbb{R})^{\mathbb{R}}|$