פתרון תרגיל 12

3.23. א. $\Leftarrow$: מהתירגול

$\Rightarrow$:T נורמלית אז T לכסינה ונתון שהע"ע ממשיים. מההרצאה זה אומר שהנורמליות גוררת צל"ע.

ב. $\Leftarrow$:T אוניטרית אזי

$$\lambda^2 <v,v>=<\lambda v,\lambda v>=<Tv,Tv>=<T^*Tv,v>=<v,v>$$
$$\Downarrow$$
$$|\lambda|=1$$

$\Rightarrow$:T נורמלית אזי T לכסינה אזי

$$T\approx\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$T^*\approx\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$
$$TT^*\approx I$$
$$\Downarrow$$
$$TT^*=I$$

3.24ג:

טענה: $T=-i(F-I)(F+I)^{-1}$

הוכחה:

מב':

$$F=(I+i(-i(F-I)(F+I)^{-1})(I-i(-i(F-I)(F+I)^{-1})^{-1}$$
$$F=(I+(F-I)(F+I)^{-1})(I-(F-I)(F+I)^{-1})^{-1}$$
$$(I-(F-I)(F+I)^{-1})F=(I+(F-I)(F+I)^{-1})$$
$$FI-I=F-I \qquad true$$

3.27:

T נורמלי אזי $TT^*=T^*T$ אזי T לכסינה אורתוגונלית מעל C : $T\approx\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=D$

נזכיר ש $\lambda_j=\rho_j e^{i\theta_j}$

לכן:

$$D=\begin{pmatrix}\rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}$$

3.30:

א. כיוון שני

$\Rightarrow$:

$$\|Tv\|^2 = <T^*Tv,v> = \sum \alpha_i{}^2\lambda_i^2 <v_i,v_i> \le \sum \alpha_i{}^2 <v_i,v_i> = <v,v> = \|v\|^2$$

ב. $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

<u>מבחן 2006- מועד ב:</u>

א.

$$\subseteq: Av=0 \Rightarrow A^2v = AAv = A\cdot 0 = 0$$

$$\supseteq: <Av,Av> = <A^*Av,v> = <A^2v,v> = <0,v> = 0$$

ב.

$$AadjA = |A|I$$

$$adjA = |A|A^{-1}$$

A א"ג אזי ההופכי שלו א"ג ולכן ה ajd א"ג

<u>שאלה שהופיעה כבונוס באותו מבחן:</u>

לא. למשל:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$