פתרון תרגיל בית 3 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

20 במרץ 2016

1. בדרך קומבינטורית, קל לראות שהמקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא מספר טבעי (ולא שבר), כי הוא סופר את מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. הוכיחו זאת בדרך אלגברית באופן הבא: תחילה הוכיחו את נוסחת פסקל בדרך אלגברית:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

כעת, העזרו באינדוקציה (על n ו־ k) כדי להסיק שהמקדם הבינומי הוא מספר שלם.

פיתרון:

כדי להוכיח באופן אלגברי את נוסחת פסקל, נשתמש בהגדרה של המקדם הבינומי ובחיבור שברים אלגבריים:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!((n-k)+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

כעת, עבור ההוכחה האינדוקטיבית לטענה ש־$\binom{n}{k}$ מספר שלם, מקרי הבסיס הם $\binom{n}{0} = 1$ לכל n. סכום של מספרים שלמים הוא שלם, ובעזרת נוסחת פסקל המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא סכום של מספרים שלמים לפי הנחת האינדוקציה.

2. א. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים, כך ש־6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?
ב. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים, כך ש־6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

פיתרון:

א. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

הערה: שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{10} = \binom{16}{6}$.

ב.מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

3. למסיבת פורים של המחלקה הגיעו 52 סטודנטים. בקבוקי היין שעומדים ברשותינו הם: 13 בקבוקי קברנה סוביניון, 22 בקבוקי יין לבן חצי יבש ו־17 בקבוקי מוסקט של יין הגולן. רוצים שכל סטודנט יקבל בדיוק בקבוק אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

פיתרון:

תחילה נבחר 13 סטודנטים מתוך 52 וניתן להם קברנה סוביניון, ויש $\binom{52}{13}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $39 = 52-13$ הסטודנטים הנותרים נבחר 22 תלמידים שישתו יין לבן חצי יבש, ויש $\binom{39}{22}$ אפשרויות כאלו. שאר הסטודנטים מוכרחים לשתות מוסקט, הרי $1 = \binom{17}{17}$. בסך הכל יש $\binom{52}{13}\binom{39}{22}\binom{17}{17} = \frac{52!}{13!22!17!}$ דרכים לבחירה.

שימו לב שהתשובה $\frac{30!}{7!18!5!}$ לא תלויה בסדר של בחירת קבוצות הבקבוקים. תרגיל זה הוא דוגמה למקדם המולטינומי. הסימון של מקדם זה הוא $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ כאשר $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$, והוא סופר את מספר הדרכים לחלק n עצמים שונים (אצלנו 52 הסטודנטים) ל־m קבוצות (אצלנו שלושת סוגי היינות), כך שבקבוצה הראשונה יש k_1 עצמים, בקבוצה השנייה יש k_2 עצמים וכן הלאה.

4. ועדת פרס רוצה לחלק סכום של 10000 ש"ח בין 10 זוכים. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם:
א. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים?
ב. הפרסים הם מספרים שלמים חיוביים ממש (לא אפסים)?
ג. המספרים הם שלמים אי־שליליים בכפולות של 100?

פיתרון:

נשתמש כאן כמה פעמים בחלוקה של k כדורים זהים לתוך n תאים. זו בחירה עם חזרה וללא חשיבות לסדר, כלומר $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

א. השאלה שקולה למציאת מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1+x_2+\ldots+x_{10}=10000$$

במספרים שלמים אי־שליליים. כלומר $\binom{10+10000-1}{10000}=\binom{10009}{9}$ דרכים.

ב. כאן אנו דורשים שבפתרונות למשוואה שבסעיף הקודם, יתקיים $x_i\geq 1$ לכל i. כלומר בכל תא יש לפחות כדור אחד. כלומר השאלה שקולה למספר הדרכים לחלוקה של $10000-10$ כדורים זהים לתוך 10 תאים, שהוא $\binom{9999}{9}$ דרכים.

ג. כל פיתרון של המשוואה מהסעיף הראשון, כאשר המשתנים כפולות של 100, הוא בחירה טובה, (וכל חלוקה של הפרס לכפולות של מאה היא בפרט חלוקה לשלמים אי שליליים, ולכן נמצאת בפיתרון סעיף ראשון). לכן נוכל לחלק את המשוואה לעיל ב־100, ולהגדיר משתנים חדשים $y_i=x_i/100$ עבור הפתרונות המתאימים שאנו יודעים שהם שלמים. לכן יש $\binom{10+100-1}{100}=\binom{109}{9}$ אפשרויות.

5. תהי A קבוצה עם $|A|=n$, ו־R יחס סדר מלא על A (כלומר, לכל $a,b\in A: aRb\vee bRA$). מצא את $|R|$.

פיתרון:

תחילה יש לבחור את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, מכיוון שיחס סדר מלא הוא אנטי־סימטרי, כלומר $\binom{n}{2}$ זוגות. מכיוון שהוא רפלקסיבי, אם $a\in A$, אז aRa. לכן נקבל כי $|R|=\binom{n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

6. לפנינו n כדורים שקופים זהים, n כדורים צבעוניים (לא שקופים, כל אחד בצבע שונה), ו־$2n$ תאים ממוספרים מ־1 עד $2n$. בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים לתאים כך שבכל תא:
א. לכל היותר כדור שקוף אחד.
ב. לכל היותר כדור צבעוני אחד.
ג. לכל הפחות שני כדורים שקופים.

פיתרון:

א. אין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא, ולכן זו בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$ אפשרויות. מספר האפשרויות לכדורים השקופים הוא בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר $\binom{2n}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $\binom{2n}{n}(2n)^n$ אפשרויות.

ב. בבחירה של הכדורים הצבעוניים אנו בוחרים n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרה, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות. בבחירה של הכדורים השקופים אין חשיבות לסדר (כי הם זהים), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר $\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $\frac{(2n)!}{n!}\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות.

ג. אין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא, ולכן זו בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$ אפשרויות. נסמן ב־A את קבוצת האפשרויות לחלק את הכדורים השקופים לתאים ללא תנאים. מסעיף קודם אנו יודעים ש־$|A|=\binom{2n+n-1}{n}$. נסמן ב־B את קבוצת האפשרויות לחלק את הכדורים לתאים כך שבכל תא לכל היותר כדור שקוף אחד. מסעיף א ידוע ש־$|B|=\binom{2n}{n}$. נשים לב ש־$B\subseteq A$ ושקבוצת האפשרויות שאנחנו מחפשים היא בדיוק $A\setminus B$ שעוצמתה, לפי מה שראינו בתרגול היא: $|A\setminus B|=|A|-|B|=\binom{2n+n-1}{n}-\binom{2n}{n}$

7. שאלת רשות: בחברה עובדים 11 עובדים עם גישה לכספת. הם לא סומכים אחד על השני ורוצים לודא שהכספת תפתח רק אם לפחות 6 עובדים נוכחים. כדי למלא אחר מטרה זו ניתן לשים על הכספת כמה מנעולים, ולחלק לכל עובד מפתחות של חלק מן המנעולים. כמה מנעולים צריך, וכמה מפתחות לחלק לכל עובד (נסו להמעיט כמה שניתן).

פיתרון:

מספר הקבוצות של 5 עובדים הוא $\binom{11}{5} = 462$. לא נרצה שקבוצה של 5 עובדים תוכל לפתוח את הכספת, ולכן נרצה לפחות $\binom{11}{5}$ מנעולים על הכספת. נמספר את הקבוצות של 5 עובדים ב־A_i ואת המנעולים ב־a_i עבור $1 \leq i \leq \binom{11}{5}$. ניתן מפתח למנעול a_i לכל מי **שלא** נמצא בקבוצה A_i. כל עובד מקבל מפתח שונה בעבור כל קבוצה A_i שאינו שייך אליה, ויש $\binom{11-1}{5} = 252$ קבוצות A_i כאלו.

כעת, נסתכל על קבוצה A_i ספציפית. בודאי שחברי הקבוצה לא יוכלו לפתוח את הכספת, כי אין להם מפתח למנעול a_i. אבל אם נוסיף עובד נוסף לקבוצה, אז בודאי הוא יוכל לפתוח את מנעול a_i. הקבוצה הזאת (אחרי שנוסף עובד נוסף) תוכל לפתוח כל מנעול, שהרי מפתח לכל אחד מן המנעולים חולק ל־$11 - 5 = 6$ עובדים. כלומר, את מנעול a_j לפחות אחד מחברי הקבוצה יוכל לפתוח כי אחד מהם לא השתייך לקבוצה A_j (אפשר להסתכל "הפוך", ולומר כי 5 עובדים בדיוק לא יכולים לפתוח את מנעול a_j, ובקבוצה יש 6 עובדים).