הגדרה

טור מרוכב הוא סכום אינסופי

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (z_n \in \mathbb{C})$$

נתאים לטור "סכומים חלקיים"

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$$

אם קיים $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ אומרים שהטור מתכנסו וסכומו S. ז"א

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

אם $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ אינו קיים, אומרים שהטור מתבדר.

משפט 5

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum x_n$ וגם $\sum y_n$ מתכנסים, ואם כן, $\sum z_n = \sum x_n + i\sum y_n$.
2. אם $\sum z_n$ וגם $\sum w_n$ מתכנסים ואם $c \in \mathbb{C}$ קבוע מרוכב אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n + cw_n$ מתכנס לסכום $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n + c\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.
3. טור שמתכנס בהחלט מתכנס. ז"א אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_n$ מתכנס.

הגדרה

נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה $f_n : S \to \mathbb{C}$. אז אפשר לבנות טור של פונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (z \in S)$$

בהתאם לטור זה יש סכומים חלקיים

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

תחום ההתכנסות של הטור הוא

$$S \supset T = \left\{ z \in S \middle| \exists \lim_{N\to\infty} S_N(z) \right\}$$

על T מוגדרת פונקציה גבולית

$$f\left(z\right)=\lim_{N\to\infty}S_{N}\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(z\right)$$

אומרים שהטור מתכנס ל$f\left(z\right)$ במ"ש על T אם

$$S_{N}\left(z\right)\to f\left(z\right)$$

במ"ש על T.

משפט 1'

תהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(z\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n}+iv_{n}$ טור פונציות על קבוצה $S\subset\mathbb{C}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. הטור מתכנס ל$f\left(z\right)=\left(u+iv\right)\left(z\right)$ במ"ש על S.
2. $\sum u_{n}=u$ וגם $\sum v_{n}=v$ במ"ש על S.
3. $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{z\in S}\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty}f_{n}\left(z\right)\right|=0$.

דוגמה חשובה

טור הנדסי

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}=1+z+z^{2}+z^{3}+\ldots$$

$$S_{N}\left(z\right)=1+z+z^{2}+\cdots+z^{N}$$

$$zS_{N}\left(z\right)=z+z^{2}+\cdots+z^{N}+z^{N+1}$$

$$S_{N}\left(z\right)-zS_{N}\left(z\right)=1-z^{N+1}$$

$$S_{N}\left(z\right)=\frac{1-z^{N+1}}{1-z}\qquad\left(z\neq1\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{N}\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-z} & \left|z\right|<1\\ \text{does not exist} & \text{otherwise}\end{cases}$$

מצאנו שהטור ההנדסי מתכנס בדיוק בעיגול היחידה U.

...

יש התכנסות במ"ש על $B_r = \{z \in \mathbb{C} | |z| < r\}$ עבור $0 < r < 1$

משפט 2'

נניח ש$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ במ"ש על S. עוד נניח שכל $f_n(z)$ רציפה בS אזי $f(z)$ רציפה בS.

משפט 3'

נניח שכל $f_n(z)$ רציפה לאורך המסילה γ, ונניח ש$f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ במ"ש על γ. אזי

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$$

משפט 4'

נניח ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ הוא טור של פונקציות בעלות נגזרת רציפה בתחום $D \subset \mathbb{C}$. עוד נניח שבנקודה אחת(לפחות) $z_0 \in D$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ מתכנס, וטור הנגזרות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ מתכנס במ"ש לפונקציה $g(z)$ בD. אזי הטור המקורי מתכנס בD לפונקציה גזירה $f(z)$(אנליטית בD) ומתקיים

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) = g(z)$$

המסר הוא: כדי לגזור טור איבר איבר צריכים לבדוק שהטור הגזור מתכנס במ"ש.

משפט 7(מבחן הm של ויירשטרס)

נניח שלכל n הפונקציה $f_n(z)$ מוגדרת בקבוצה $S \subset \mathbb{C}$, ומתקיים $|f_n(z)| \le m_n$ לכל $z \in S$. עוד נניח ש$\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ מתכנס. אזי:

1. לכל $z \in S$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס בהחלט.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במ"ש על S.

הוכחה

1. ניקח $z \in S$ כלשהו. לפי הנתון לכל n $0 \le |f_n(z)| \le m_n$, וכיוון ש$\sum m_n$ מתכנס, מבחן ההשוואה לטורים חיוביים אומר ש$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ מתכנס. ז"א $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס בהחלט.

2. לפי חלק א' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס לכל $z \in S$ ומוגדרת פונקציה גבולית

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (z \in S)$$

נותר להוכיח שהתכנסות זו היא במ"ש על S. ובכן: יהי $\epsilon > 0$ נתון. נתון שטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ מתכנס. לכן קיים N_0 טבעי כך שאם $N > N_0$ אזי $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} m_n < \epsilon$. כעת אם $N > N_0$ אזי לכל $z \in S$

$$|f(z) - S_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} m_n < \epsilon$$

הדבר אפשרי לכל $\epsilon > 0$, לכן $S_N \to f$ במ"ש על S, וזה אומר בדיוק שהטור $\sum f_n$ מתכנס לf במ"ש על S.

■

סימון

1. לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ו$r > 0$ נסמן ב$B(z_0, r)$ את העיגול הפתוח $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$.
2. נסמן ב$\overline{B(z_0, r)}$ את העיגול הסגור $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\}$.
3. נסמן ב$C(z_0, r)$ את המעגל $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\}$. לכן

$$\overline{B(z_0, r)} = B(z_0, r) \cup C(z_0, r)$$

4. עבור תחום $D \subset \mathbb{C}$ הסימון $f \in H(D)$ אומר שהפונקציה f היא הולומורפית(=אנליטית) בD.

הגדרה

טור חזקות הוא טור פונקציות מהסוג

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \dots$$

כאשר $z_0 \in \mathbb{C}$(מספר קבוע) והמקדמים $a_n \in \mathbb{C}$(קבועים!)

דוגמה פשוטה היא הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. כאשר $z_0 = 0$, וכל $a_n = 1$. מצאנו שהטור ההנדסי מתכנס ב$B(0,1)$ ומתבדר מחוץ לעיגול זה, והוא מתנכתס במ"ש בעיגולים $\overline{B(0,r)}$, $0 < r < 1$.

משפט 8

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות מרוכב כלשהו. נגדיר

$$R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (0 \le R \le \infty)$$

אזי:

1. עבור כל $z \in B(z_0, R)$, טור החזקות מתכנס בהחלט בנקודה z.
2. עבור כל z כך ש$|z-z_0| > R$ הטור מתבדר בנקודה z.
3. לכל r כך ש$0 < r < R$ טור החזקות מתכנס במ"ש בעיגול $\overline{B(z_0, r)}$.

"R" נקרא רדיוס ההתכנסות של הטורץ

הוכחה

העתק מילה במילה מאינפי.

משפט 9(מבחר ד'אלמבר)

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות מרוכב כלשהו. נניח שקיים $S = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. אזי $R = S$=רדיוס ההתכנסות של הטור.

משפט 10

נניח שלטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ יש רדיוס התכנסות $R > 0$. אזי הטור מתכנס ב$B(z_0, R)$ לפונקציה אנליטית:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

לכל $z \in B(z_0, R)$,

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [a_n (z - z_0)^n] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

המסר הוא שבתוך עיגול ההתכנסות $B(z_0, R)$ מותר לגזור את הטור איבר איבר. לטור הגזור יש אותו רדיוס התכנסות R כמו לטור המקורי.

הוכחה

תחילה נוכיח את הטענה האחרונה שלטור הגזור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ יש רדיוס התכנסות R. בינתיים נסמן את רדיוס ההתכנסות של הטור הגזור בS.

נעיר שהטור הגזור מתכנס $\Leftrightarrow$ הטור הבא מתכנס:

$$(z - z_0) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$$

לכן

$$\frac{1}{S} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{n |a_n|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

לכן $S = R$.

כעת אם $0 < r < R$, משפט 8 מבטיח שהטור הגזור מתכנס במ"ש בעיגול $B(z_0, r)$, ולכן נוכל להסתמך על משפט 4' לומר שלכל $z \in B(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $\Leftarrow$

$$\Rightarrow \exists f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

עצם זה שהנגזרת קיימת אומר שf אנליטית ב$B(z_0, r)$, וקיבלנו נוסחה לנגזרת.

$\blacksquare$

מסקנה 1

בנתונים של משפט 10, לכל $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n (n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

נכון לכל $z \in B(z_0, R)$

הוכחה

גוזרים את הטור הגזור עוד $k-1$ פעמים, ההוכחה הפורמלית באינדוקציה.

מסקנה 2

בנתונים של משפט 10, לכל $k=0,1,2,\cdots$, $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ [כאשר מוסכם $f^{(0)}(z)=f(z)$ ו-$0!=0$]. לכן הטור הוא טור טיילור של f סביב z_0.

הוכחה

לפי מסקנה 1,

$$f^{(k)}(z)=k(k-1)(k-2)\dots(k-k+1)a_k(z-z_0)^{k-k}=$$

$$=k!a_k+\frac{(k+1)!}{2}a_{k+1}(z-z_0)^1+\frac{(k+2)!}{3!}a_{k+2}(z-z_0)^2+\dots$$

נציב $z=z_0$ להסיק

$$f^{(k)}(z_0)=k!a_k\Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

■

מסקנה 3(משפט היחידות לטורי חזקות)

נניח שלכל z באיזו סביבה של z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

אזי לכל n $a_n=b_n$.

הוכחה

נגדיר

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

לפי הנתון השוויון מתקיים באיזו סביבה $B(z_0,r)$, אבל לפי מסקנה 2 לכל n $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=b_n$, ולכן הם שווים!

תרגיל

נמציא טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ שיתכנס ל־e^z עבור כל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון

תחילה נוכיח למה: אם $f(z)$ פונקציה שלימה כך ש־$f'(z) = f(Z)$, אז בהכרח $f(z) = ce^z$ (‏$c \in \mathbb{C}$ קבוע)

הוכחה: נתון $f' = f$. נגדיר $g(z) = f(z) e^{-z}$. לכן

$$g'(z) = f'(z) e^{-z} + \left(-f(z) e^{-z}\right) = e^{-z} \left[f'(z) - f(z)\right] = 0$$

כיוון ש־$g'(z) = 0$, לכל $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = c$ וממילא $f(z) = g(z) e^z = ce^z$, והוכחנו את הלמה.

לכן כדי לבנות טור חזקות

$$ce^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

מספיק שהטור יהיה שווה לנגזרת שלו. לפי משפט 10 הדרישה היא

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z$$

....

מצאנו

אם לטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ יש רדיוס התכנסות חיובית $R > 0$ אז הטור מתכנס לפונקציה אנליטית

$$f \in H(B(z_0, R))$$

כעת נלך בכיוון הפוך. נתחיל עם פונקציה $f \in H(B(z_0, R))$ ונוכיח שתמיד f שווה לטור טיילור שלה. ז"א לכל $z \in B(z_0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

תחילה נוכיח את זה שבמקרה פרטי $z_0 = 0$. לצורך ההוכחה נזכיר: אם $f \in H\left(\overline{B(z_0, R)}\right)$ אז יש לנו נוסחת קושי לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w$$

ובמקרה $z_0 = 0$,

$$\boxed{f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w^{w+1}}\mathrm{d}w}$$

משפט 11

נניח ש$f \in H\left(\overline{B(0,R)}\right)$. אזי לכל $z \in B(0,R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(z)}(0)}{n!} z^n$$

(ז"א f שווה לטור מקלורן שלה)

מסקנה 1

משפט 11 נכון גם אם רק נניח ש$f \in H(B(0,R))$ [במקום $f \in H\left(\overline{B(0,R)}\right)$].

מסקנה 2

נניח ש$f \in H(B(z_0,R))$, אזי לכל $z \in B(z_0,R)$, $f(z)$ שווה לטור טיילור שלה:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

הוכחה

נגדיר $g(z) = f(z+z_0)$. כאשר $z \in B(0,R)$, $z + z_0 \in B(z_0,R)$. לכן

$$f \in H(B(z_0,R)) \Rightarrow g \in H(B(0,R))$$

לכן ע"פ משפט 11

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (z \in B(0,R))$$

כיוון ש$g(z) = f(z+z_0)$, $f(z) = g(z-z_0)$ ולכן עבור כל $z \in B(z_0,R)$,

$$f(z) = g(z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(z-z_0)^n$$

אבל לכל n,

$$g^{(n)}(z)=f^{(n)}(z+z_0)\Rightarrow g^{(n)}=f^{(n)}(z_0)$$

לבסוף, עבור כל $z\in B(z_0,R)$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$\blacksquare$