פתרון תרגיל בית 12 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

לאורך התרגיל, נסמן ת"ח p־סילו בH_p.

1. הוכח כי כל חבורה מסדר 130 אינה פשוטה. מצאו חבורה לא אבלית מסדר זה, ומצאו ת"ח נורמלית לא טריוויאלית שלה.

פתרון:
נפרק לגורמים $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$. ממשפט סילו השלישי נקבל $n_{13}|10$ וגם $n_{13} \equiv 1 \pmod{13}$ ולכן $n_{13} = 1$. ת"ח 13־סילו אם כן היא יחידה ולכן נורמלית־ ולכן החבורה אינה פשוטה.
דוגמא לת"ח לא אבלית כזאת היא D_{65} ות"ח 13־סילו שלה היא $\langle \sigma^5 \rangle$ (שימו לב שזהו איבר מהסדר המתאים, ובגלל היחידות של חבורת 13־סילו ברור שזוהי הת"ח המתאימה).

2. תהי G חבורה מסדר $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

(א) הוכח כי H_7,H_{11} נורמליות בG.
פתרון:
לפי משפט סילו השלישי..... $n_7 = 1$ ו$n_{11} = 1$.

(ב) הוכח כי $H_7 \subseteq Z(G)$ (רמז: העזר בהוכחה של טענה מההרצאה: אם חבורה היא מסדר $m = m \cdot p$ כאשר m זר ל p וגם m זר ל $p-1$ אז חבורת p־סילו נורמלית היא מרכזית).
פתרון:
לפי משפט N/C יש שיכון

$$N_G(H_7)/C_G(H_7) \hookrightarrow Aut\left(H_7\right)$$

H_7 היא מסדר 7 ולכן $H_7 \cong \mathbb{Z}_7$, וכידוע $Aut\left(\mathbb{Z}_n\right) \cong U_n$.
בנוסף, מכיוון שH_7 נורמלית אז $N_G\left(H_7\right) = G$ ולכן בעצם קיבלנו שיכון

$$G/C_G(H_7) \hookrightarrow U_7$$

זה נותן ש $[G:C] \,|\, |U_7| = 6$ אבל גם $[G:C] \mid |G| = 385$ ואילו $(6, 385) = 1$ ולכן בהכרח $[G:C] = 1$ מה שנותן $G = C_G(H_7)$.
זה אומר בדיוק ש $H_7 \subseteq Z(G)$.

(ג) הוכח כי או ש $Z(G)=H_7$ או ש G ציקלית.

פתרון:

נניח ש $H_7 \subsetneq Z(G)$ (ונראה שאז החבורה היא ציקלית).

לפי הנחה זו $7 \,|\, |Z(G)|$, ולפי לגרנז' $|Z(G)| \in \{7\cdot 5, 7\cdot 11, 7\cdot 5\cdot 11\}$.

נראה שבכל מקרה נקבל שהחבורה אבלית (ואז נמשיך לצקליות):

אם המרכז מסדר $5\cdot 7\cdot 11$ אז המרכז הוא כל החבורה וברור שהיא אבלית.

אם המרכז הוא מסדר $7\cdot 5$: אז המנה ${}^{G}/{}_{Z(G)}$ היא מסדר ראשוני 11 ולכן היא ציקלית. ולפי טענה זה אומר שהחבורה היא אבלית.

אם המרכז הוא מסדר $7\cdot 11$: אז המנה ${}^{G}/{}_{Z(G)}$ היא מסדר ראשוני 5 ולכן היא ציקלית. ולפי טענה זה אומר שהחבורה היא אבלית.

קיבלנו שG אבלית ואזי כל ת"ח סילו שלה נורמליות ואז היא מכפלה פנימית של חבורות סילו שלה $G=H_5H_7H_{11}$. ולכן $G\cong H_5\times H_7\times H_{11}$.

אבל כל חבורת סילו היא מסדר ראשוני ולכן צקלית $G\cong \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{11}\cong \mathbb{Z}_{385}$ ציקלית.

יש לשים לב שהאיזומורפיזם האחרון נובע מכך שמהספרים $5,7,11$ הם כולם זרים זה לזה.

3. תהי G חבורה מסדר 30.

(א) הוכח כי לפחות אחת מתת־ החבורות סילו H_3, H_5 היא נורמלית.

פתרון:

לפי משפט סילו השלישי... $n_3\in\{1,10\}$ ו $n_5\in\{1,6\}$.

אם בשלילה שתי החבורות לא נורמליות אז $n_3=10$ ו $n_5=6$.

נשים לב שגודל כל חבורת 3 ־סילו הוא 3 ולכן החיתוך של כל זוג ת"ח 3־סילו הוא טריוויאלי (ראינו טענה כזאת בתירגול). ובאופן דומה עבור 5־סילו.

ולכן יש $10(3-1)=20$ איברים מסדר 3 ו־ $6(5-1)=24$ איברים מסדר 5 - זה כבר נותן 44 איברים שונים בחבורה וזו סתירה!

(ב) הוכח כי לG יש ת"ח מסדר 15 .

פתרון:

נתבונן ב $K=H_3H_5$. מכיוון שהראנו שלפחות אחת מהן נורמלית, אז המכפלה שלהן היא ת"ח ו$K\leq G$.

מכיוון שאלו ת"ח סילו עבור ראשוניים שונים אז החיתוך שלהם טריוויאלי, מה שמבטיח ש $|K|=|H_3|\,|H_5|=3\cdot 5=15$.

4. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 160 אינה פשוטה. (רמז: השתמשו בעידון של משפט קיילי)

פתרון:

$160=2^5\cdot 5$.

נניח בשלילה שיש חבורה כזו פשוטה G, לפי סילו השלישי $n_2=5$ (זה לא יכול להיות 1 כי אז החבורה לא הייתה פשוטה).

תהי P ת"ח 2־ סילו, אז האינדקס של המנרמל הוא 5: $[G\colon N_G(P)]=5$, ולפי העידון של משפט קיילי יש הומומורפיזם $G\to S_5$.

מכיוון שהנחנו שG פשוטה אז זהו בהכרח שיכון (כי הגרעין בהכרח טריוויאלי) $G\hookrightarrow S_5$.

נסיק ש $|G| \,\big|\, |S_5|=5!$ אבל זה לא קורה! קיבלנו סתירה.

5. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 40 אינה פשוטה. (רמז: שוב העידון של קיילי, אך הפעם הסתכלו גם על החיתוך עם הת"ח A_n).

פתרון:
$40 = 2^3 \cdot 5$
נניח בשלילה שיש חבורה כזו פשוטה G, לפי סילו השלישי $n_2 = 5$.
תהי P ת"ח 2- סילו, אז האינדקס של המנרמל הוא 5: $[G{:}\,N_G(P)] = 5$, ולפי העידון של משפט קיילי יש הומומורפיזם $G \to S_5$.
מכיוון שהנחנו ש G פשוטה אז זהו בהכרח שיכון (כי הגרעין בהכרח טריוויאלי) $G \hookrightarrow S_5$.
נסתכל כעת בחיתוך $G \cap A_5 \subseteq S_5$.
מכיוון ש $A_5 \lhd S_5$ אז $G \cap A_5 \lhd G$ (את הטענה הזו ראיתם במשפט האיזו' השני).
אבל הנחנו שG פשוטה ולכן $G \cap A_5 = G$ או $G \cap A_7 = \{e\}$.
לפי משפט האיזומורפיזם השני מתקיים

$$G/G\cap A_5 \cong GA_5/A_5 \leq S_5/A_5$$

ולכן $[G{:}\,G\cap A_5] \leq [S_5{:}\,A_5] = 2$ ־ ולכן בהכרח $G \cap A_5 = G$, מה שאומר ש $G \subseteq A_5$.
זה גורר ש $|G| \mid |A_5|$ מה שלא קורה! קיבלנו סתירה.

6. (א) כמה חבורות אבליות מסדר 500 יש? (עד כדי איזומורפיזם)

$500 = 2^2 \cdot 5^3$.
האפשרויות לחלק ה2 : $\mathbb{Z}_{2^2}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (2 אפשרויות).
האפשרויות לחלק ה5: $\mathbb{Z}_{5^3}$, $\mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (3 אפשרויות).
ולכן יש $2 \cdot 3 = 6$ חבורות כאלו.

(ב) בכמה מהן יש איבר מסדר 20?
בג מהן.
באלו שיש את הרכיב $\mathbb{Z}_4$ יש איבר מסדר 4, יחד עם איבר מסדר 5 (שתמיד יש ברכיב של ה5 לפי קושי)־ נקבל 2 איברים מתחלפים מסדר 4 ו־5. לכן סדר המכפלה שלהם הוא 02.

(ג) בכמה מהן יש איבר מסדר 4?
בג מהן (אלו שיש בהן מרכיב $\mathbb{Z}_4$ בלבד).

7. בכמה חבורות אבליות מסדר 3600 ת"ח 5־סילו היא ציקלית?
$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. משיקולים דומים לשאלה הקודמת יש $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ חבורות אפשריות מסדר זה (עד כדי איזו').
ת"ח 5־ סילו של החבורה הוא ציקלי אך ורק כאשר המרכיב של 5 הוא $\mathbb{Z}_{25}$ולא $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
וכאלו יש $5 \cdot 2 = 10$ חבורות.

8. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5$.

$$\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5$$

9. האם קיימת חבורה G אבלית מסדר 32 כך ש $\exp(G) = 4$, ו$[G : G^2] = 4$?
כאשר $G^2 = \{g^2 \mid g \in G\}$.

פתרון:
האפשרויות לחבורה אבלית מסדר 23 ואקספוננט 4 הן רק:

$$G_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ו

$$G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$$

נשים לב שרשמנו אותם כחבורות חיבוריות, ולכן G^2 זה בעצם $2G$!
נחשב את המנות:

$$G_1/2G_1 = G_1/0 = G_1$$

$$G_2/2G_2 = G_2/0\times 2\mathbb{Z}_4 \times 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ובכל מקרה האינדקס לא יוצא 4. ולכן אין חבורה כזאת.