הרצאה 20

R חוג חילופי, $I \triangleleft R$ אידיאל, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$.

הגדרנו טופולוגיה על R: תת-קבוצה $U \subseteq R$ פתוחה אם ורק אם לכל $x \in U$ קיים n כך ש- $x + I^n \subseteq U$.

ראינו שהטופולוגיה הזאת לא בהכרח שלמה: יכולות להיות סדרות קושי בלי גבול. רוצים השלמה של R.

נבנה אותה בשני דרכים.

יהי C החוג של כל סדרות קושי $\{a_n\}$, $a_n \in R$ (חיבור וכפל איבר-איבר).

צ"ל מוגדר כי $\{a_n\}, \{b_n\} \in C \Rightarrow \{a_n + b_n\} \in C$,
$\{a_n b_n\} \in C$

אכן, לכל $x \in R$,
$d(ax, bx) \le d(a, b)$
$d(x+a, x+b) = d(a, b)$
(אם $a \neq b$, אז $d(a,b) = 2^{-n}$, $n = \max\{m : a-b \in I^m\}$)

$a - b \in I^m \Rightarrow xa - xb \in I^m$.

$\{a_n\}, \{b_n\} \in C$, יהי $\varepsilon > 0$ קיים N כך שאם $n, m \ge N$ אז $d(a_n, a_m) < \varepsilon$, $d(b_m, b_n) < \varepsilon$.

$$d(a_nb_n, a_mb_m) \le \max\{\underbrace{d(a_nb_n, a_mb_n)}_{<\varepsilon}, \underbrace{d(a_mb_n, a_mb_m)}_{<\varepsilon}\} < \varepsilon$$

אי-שוויון ה-Δ החזק

לכן $\{a_nb_n\}\in C$.

סדרה $\{a_n\}\in C$ נקראת אפסית אם $a_n \to 0$, כלומר לכל m קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $a_n\in I^m$. יהי $Z\subseteq C$ הקבוצה של כל הסדרות האפסיות. אזי $Z \trianglelefteq C$. נגדיר $\hat{R} = C/Z$ (האוסף של כל הקבוצות של סדרות קושי ב-R).

II. יהי S קבוצה עם סדר חלקי. נניח שנתונים: לכל $s\in S$, נתון חוג R_s. לכל $s\le t$, נתון הומ' $f_{st}: R_t \to R_s$.

נניח שאם $s\le t\le u$

$$f_{su} = f_{st}\circ f_{tu}$$

זה נקרא מערכת הפוכה (פרויקטיבית) של חוגים

הגדרה בהינתן מערכת הפוכה כנ"ל, הגבול ההפוך שלה הינו

$$\varprojlim_{s} R_s = \left\{ (a_s) \in \prod_{s\in S} R_s \;\middle|\; f_{st}(a_t) = a_s \quad \forall s\le t \right\}.$$

זה חוג, חיבור וכפל איבר-איבר.

דוגמא יהי $S=\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל.

יהי R חוג חילופי, $I \lhd R$ אידיאל (עם הנחה $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$). לכל $n\in\mathbb{N}$, יהי $R_n = R/I^n$.

אם $m\le n$,

$$f_{mn}: R/I^n \longrightarrow R/I^m$$
$$r+I^n \longmapsto r+I^m.$$

הגבול ההפוך הינו

$$\varprojlim R_n = \left\{ (a_1+I,\ a_2+I^2,\ a_3+I^3, \dots) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_n\in R \\ \text{ולכל } m\le n, \\ a_m-a_n\in I^m \end{array} \right\}$$

טענה יהיו R, I כנ"ל. אז $\varprojlim R/I^n \simeq \hat{R}$.

<u>הוכחה</u> נבנה איזומורפיזם

$$\varphi : \varprojlim R/I^n \longrightarrow \hat{R}$$

$$(a_1+I,\ a_2+I^2, \dots) \longmapsto \underbrace{(a_1, a_2, a_3, \dots)}_{\in C \text{ כי } a_m - a_{m'} \in I^n \text{ כאשר } n \leq m,m'.} + Z$$

ברור שזה הומ' של חוגים.

<u>φ חח"ע</u> יהי $(a_1+I, a_2+I^2, \dots) \in \ker\varphi$. אז $(a_1, a_2, \dots) \in Z$. לכן, לכל m, $a_n \in I^m$ לכל n מספיק גדול (בפרט $n \geq m$). אבל $a_m - a_n \in I^m$ אם $n \geq m$ $\Leftarrow$ $a_m \in I^m$ $\Leftarrow$

$(a_1+I,\ a_2+I^2, \dots) = (0+I,\ 0+I^2, 0+I^3, \dots)$.

<u>φ על</u> יהי $(a_1, a_2, a_3, \dots) + Z \in \hat{R}$. הרעיון הוא לקחת את $(a_1+I,\ a_2+I^2, \dots)$ אבל אין שום סיבה שהתנאי $\underset{n \geq m}{a_m - a_n \in I^n}$ יתקיים.

אבל $(a_1, a_2, \dots) \in C$ לכל m קיים N_m כך ש- $a_{n'} - a_n \in I^m$ כאשר $n, n' \geq N_m$.

יהי $b_m = a_{\max\{m, N_m\}}$. אז $\{b_m\}$ היא

תת-סדרה של סדרה קושי, לכן סדרה קושי בעצמה. אני טוען $\{a_n\}+Z = \{b_n\}+Z$

אכן, לכל $n \geq \max\{m, N_m\}$ מתקיים $b_n - a_n \in I^m$

$a_{\max\{N_n, n\}}$
$\geq \max\{N_m, m\}$

ולכן $b_n - a_n \to 0$.

נשים לב כי $b_m - b_n \in I^m$ לכל $n \geq m$.

$$\begin{array}{cc} \hat{} & \| \\ a_{m'} & a_{n'} \end{array}$$

$m', n' \geq N_m$

לכן

$$\varphi(\underbrace{b_1 + I,\ b_2 + I^2,\ b_3 + I^3, \dots}_{\in \varprojlim R/I^n}) = \{b_n\} + Z = \{a_n\} + Z.$$

לכן φ על, והוא איזומורפיזם.

באופן כללי, מעניין לחשוב על איברים של $\hat{R}$ בצורה $(a_1 + I, a_2 + I^2, \dots)$.

<u>טענה</u> יש שיכון $g : R \to \hat{R}$

$$g(r) = (r + I, r + I^2, r + I^3, \dots)$$

<u>הוכחה</u> ברור כי g מוגדר היטב והומו'!

צריך להוכיח חח"ע. אם $g(r)=g(s)$, אזי

$r+I^m = s+I^m$ לכל m $\Leftarrow$ $r-s\in\bigcap_{m=1}^{\infty} I^m=(0)$ $\Leftarrow$

$r-s=0$ $\Leftarrow$ $r=s$.

נזכיר

$$\hat{I} = \{(a_1+I, a_2+I^2,\dots) : a_n\in I \ \forall n\in\mathbb{N}\} \trianglelefteq \hat{R}.$$

<u>טענה</u> נניח בנוסף שהחוג R נתרי. אזי לכל $m\geq 1$ מתקיים

$$\hat{I}^m = \{(a_1+I, a_2+I^2,\dots) \mid a_n\in I^m \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$

<u>הוכחה</u> יהי $J_m = \{(a_1+I, a_2+I^2,\dots) \mid a_n\in I^m\}$. צריך

להוכיח $\hat{I}^m = J_m$.

הכיוון $\hat{I}^m\subseteq J_m$ לא משתמש בנתריות.

כל איבר של $\hat{I}^m$ הינו סכום של

מכפלות $\{\underline{a}_1\}\{\underline{a}_2\}\cdots\{\underline{a}_m\}$ כאשר $\underline{a}_i\in\hat{I}$.

"

$$(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+I,\ \underbrace{a_{12}a_{22}a_{32}\cdots a_{m2}}_{\in I^m}+I^2,\dots)$$

$\in J_m$.

צריך להוכיח כי $J_m \subseteq \hat{I}^m$. יהי

$(a_1+I, a_2+I^2, \dots) \in J_m$.

אזי $a_1, a_2, \dots \in I^m$. אם R נתרי, אזי

I נוצר סופית, ולכן I^m נוצר סופית.

יהיו $x_1, \dots, x_t \in R$ יוצרים של I^m.

(אם $y_1, \dots, y_n$ יוצרים של I, אז כל המכפלות של m מ-y_i-ים יוצרים את I^m.)

ניתן להציג את כל a_n בצורה

$$a_n = r_{n1}x_1 + r_{n2}x_2 + \dots + r_{nt}x_t, \quad r_{ij} \in R.$$

<u>תרגיל</u> (קל) (מבכורג), ה-r_{ij} לא בהכרח יחידים.

בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח

$r_{nj} - r_{kj} \in I^n$ לכל $k \geq n$ ולכל $1 \leq j \leq t$.

ב) $J_m \subseteq \hat{I}^m$

<u>מסקנה</u> יהיו R, I כנ"ל, R לא בהכרח נתרי.

אזי $\bigcap_{m=1}^{\infty} \hat{I}^m = (0)$.

הוכחה. $\bigcap_{m=1}^{\infty} \hat{I}^m \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m = (0)$.

לכן, יש לנו טופולוגיה של האוסדורף על $\hat{R}$ שמוגדרת על ידי האידאלים $\hat{I}$.

<u>טענה</u> אם R נתרי, אזי $\hat{R}$ שלם בטופולוגיה הנ"ל.

<u>הוכחה</u> תהי $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots$ סדרת קושי של איברים של $\hat{R}$.

$$\underline{a}_1 = (a_{11} + I,\ a_{12} + I^2,\ \dots)$$
$$\underline{a}_2 = (a_{21} + I,\ a_{22} + I^2,\ \dots)$$

לכל m קיים N_m כך שלכל $n, n' \geq N_m$, $\underline{a}_n - \underline{a}_{n'} \in \hat{I}^m$. $\Leftarrow$ $a_{nj} - a_{n'j} \in I^m$ לכל $n, n' \geq N_m$ ולכל $j \geq m$.

יהי $b_m = a_{N_m, m}$. אזי $\underline{b} \in \hat{R}$ וגם

$$b_m + I^m = a_{nm} + I^m$$

לכל n מספיק גדול. לכן, לכל $n \geq m$, $\underline{b} - \underline{a}_n = (\dots, 0 + I^m, c_{m+1} + I^{m+1}, \dots)$, ולכל $n \geq m$

$$\Leftarrow c_n \in I^m \quad \Leftarrow \quad c_n - 0 \in I^m$$

$$\underline{a}_n \to \underline{b} \quad \Leftarrow \quad \underline{b} - \underline{a}_n \in I^m$$

טענה תהי R נטרי. אזי לכל $m\in\mathbb{N}$,

$$R/I^m \cong \hat{R}/\hat{I}^m$$

הוכחה נבחן בהעתקה $\varphi: R/I^m \to \hat{R}/\hat{I}^m$

$$r+I^m \mapsto (r+I,\ r+I^2,\ r+I^3,\ \dots)+\hat{I}^m$$

צ"ל מוגדר היטב. אכן אם $s+I^m = r+I^m$, אזי $(r-s+I,\ r-s+I^2,\ \dots)\in \hat{I}^m$.

ברור כי φ הומומורפיזם. נוכיח שהוא איזו'.

φ חח"ע תהי $r+I^m\in\ker\varphi$. אזי $(r+I,\ r+I^2,\ \dots)\in\hat{I}^m$.

לכן $r\in I^m \Rightarrow r+I^m=0+I^m$.

φ על יהי $(a_1+I,\ a_2+I^2,\ \dots)+\hat{I}^m\in\hat{R}/\hat{I}^m$.

אזי $a_n-a_m\in I^m$ לכל $n\geq m$. לכן

$$(a_1+I,\ a_2+I^2,\ \dots)-(a_m+I,\ a_m+I^2,\ \dots)\in\hat{I}^m$$

לכן $\varphi(a_m+I^m) = (a_1+I,\ a_2+I^2,\ \dots) + \hat{I}^m$

ולכן φ על.

<u>הגדרה</u> יהי R חוג חילופי. הרדיקל של ג'ייקובסון של R הינו החיתוך של כל האידיאלים המקסימליים של R.

Jacobson radical

מסמנים אותו $J(R)$. ברור כי $J(R) \trianglelefteq R$.

(גם ברור $\sqrt{R} \subseteq J(R)$).

$$\sqrt{R} = \{r \in R : \exists n \geq 1,\ r^n = 0\}.$$

<u>טענה</u> יהי R חילופי, $r \in R$. אזי $r \in J(R) \iff 1+rx$ הפיך לכל $x \in R$.

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$) נניח שקיים $x \in R$ כך ש- $1+rx$ לא הפיך. אזי $(1+rx)$ הוא אידיאל אמיתי, לכן מוכל באידיאל מקסימלי M. לכן, $1+rx \in M$. אם $r \in J(R)$, אזי $r \in M$

$\Leftarrow$ $rx \in M$ $\Leftarrow$ $1 \in M$, לא יתכן כי M אמיתי!

$(\Rightarrow)$ נניח $1+rx$ הפיך לכל $x\in R$. נניח בשלילה כי $r\notin J(R)$. אזי קיים אידיאל מקסימלי $M\triangleleft R$ כך ש- $r\notin M$. לכן $M\subsetneq M+Rr$. M מקסימלי $\Leftarrow M+Rr=R$

$\Leftarrow 1\in M+Rr \Leftarrow$

$1=m+rx$ עבור $m\in M$, $x\in R$

$1-rx\in M$ בסתירה להנחה כי $1-rx$ הפיך.