הרצאה 16

הגדרה חוג R נקרא נותרי/ארטיני משמאל/מימין אם
כל שרשרת עולה

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ (נותרי)

(שרשרת יורדת $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ ארטיני)

של אידיאלים שמאליים/ימניים מתייצבת.

דוגמה $\mathbb{Z}$ נותרי אבל לא ארטיני.

$\mathbb{Z}$ תחום ראשי, הוכחנו שכל תחום ראשי נותרי.

$\mathbb{Z}$ לא ארטיני

$2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq 8\mathbb{Z} \supseteq 16\mathbb{Z} \supseteq \dots$

הערה חוג נקרא נותרי/ארטיני אם הוא נותרי/ארטיני
גם מימין וגם משמאל.

טענה יהי R חוג, $I \triangleleft R$ אידיאל דו-צדדי. אם R
נותרי/ארטיני משמאל/מימין, אז R/I גם כן.

הוכחה כבר הוכחנו לפני מספר שבועות.

משפט (הופקינס-לויצקי 1938-1939) כל חוג ארטיני משמאל/מימין
הינו גם נותרי משמאל/מימין.

אנחנו נוכיח את המשפט במקרה של חוגים חילופיים.
ההוכחה הכללית מגיעה באלגברה לא-קומוטטיבית.
המקורי הוכח על ידי אקיזוקי ב-1926. ההוכחה בגאון של קימצה 1994.

<u>הוכחה</u> יהי R חוג חילופי ארטיני. נניח בשלילה שהוא לא נתרי: אזי קיים אידאלים שאינם נוצרים סופית.

<u>צעד 1</u> קיים אידאל $I \triangleleft R$ מינימלי בין אידאלים שאינם נוצרים סופית. כלומר, I לא נוצר סופית אך כל אידאל $J \subsetneq I$ כן נוצר סופית.

<u>הוכחה</u> נניח שלא. אזי נקבל שרשרת של אידאלים שאינם נוצרים סופית, ואינם מינימליים $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq I_4$ לגבונה יונה!

בסתירה לארטיניות.

<u>צעד 2</u> אזי יהי $I \triangleleft R$ אידאל לא נוצר סופית כך שכל $J \subsetneq I$ נוצר סופית. לכל $r \in R$ נגדיר

$$rI = \{ra : a \in I\}$$

אזי $rI \trianglelefteq I$ אידאל. לכל $s \in R$, $s(ra) = (rs)a = r\underbrace{(sa)}_{I} \in rI$ כי R חילופי!

<u>הוכחה</u> $ra - rb = r(a-b)$ אזי rI סגור לחיסור.

<u>תרג 3</u> יהי I נ"ל. לכל $r\in R$ מתקיים $I=rI$ או $rI=(0)$.

<u>הוכחה</u> ברור כי $I\subseteq rI$. אם $I\neq rI$ אזי rI נוצר סופית בגלל המינימליות של I. נגדיר הומו' של R-מודולים

$$f: I \longrightarrow rI$$

$$f(a) = ra \qquad sf(a) = sra = rsa = f(sa)$$

אם $rI\neq(0)$, אזי $\ker f \subsetneq I$. זה אומר כי $\ker f$ נוצר סופית. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון (ברור כי f על) $rI \simeq I/(\ker f)$.

הוכחנו בשיעור הקודם כי $N\subseteq M$ ואם M/N, N נוצרים סופית, אזי M נוצר סופית.

מאחר וקיבלנו $(\ker f)$, $rI \simeq I/(\ker f)$ נוצרים סופית. לכן גם I נוצר סופית, בסתירה. לכן $I=rI$ או $rI=(0)$.

<u>תרג 4</u> המאפס $\mathrm{Ann}_R(I) = \{r\in R: ra=0 \ \forall a\in I\} = \{r\in R: rI=(0)\}$ הינו אידאל דו-צדדי של R.

<u>הוכחה</u> יהיו $r,s\in R$, נניח $r,s\notin Ann_R(I)$.

אזי $rI, sI \neq (0)$. לפי הלמה הקודמת, $I = sI = rI$.

לכן

$$(rs)I = r(sI) = rI = I$$

ולכן $rs\notin Ann_R(I)$.

Contrapositive: אם $rs\in Ann_R(I)$ אזי $r\in Ann_R(I)$ או $s\in Ann_R(I)$.

<u>למה 5</u> נסמן $P=Ann_R(I)$, חוג המנה R/P הינו שדה.

<u>הוכחה</u> R/P תחום שלמות כי P אידיאל ראשוני!

R/P ארטיני כי R ארטיני.

הוכחנו שכל תחום שלמות ארטיני הינו שדה.

<u>למה 6</u> (הסיום) I - R-מודול, ולכן לכל תת-מודול, יש מבנה טבעי של $R/Ann_R(I)$-מודול. אז בפרט I הינו מרחב וקטורי מעל השדה R/P.

I לא נוצר סופית $\Rightarrow$ I אינסוף-מימדי מעל R/P.

לכל מרחב וקטור ∞-מימדי יש תת-מרחב אמיתי

∞-מימדי: אכן, יהי B בסיס של מ"ו ∞-מימדי V.

יהי $b\in B$. $V' = \text{span}(\underbrace{B\setminus\{b\}}_{\text{לא בנ"ל וטריוויאלי.}}) \le V$

נגיד סותר את המינימליות של I.

לכן, כל חוג חילופי ארטיני הוא גם נתרי.

<u>הערה</u> יהי R חוג ארטיני משמאל/מימין. לכל קבוצה $\mathcal{A}\neq\emptyset$ של אידאלים שמאליים/ימניים יש איבר מינימלי (כלומר $I\in\mathcal{A}$ כך ש- $J\notin\mathcal{A}$ לכל $J\subsetneq I$).

אחרת

$$\underset{\substack{\in \\ \mathcal{A} \\ \text{לא מינימלי}}}{I_1} \supsetneq \underset{\substack{\in \\ \mathcal{A} \\ \text{לא מינימלי}}}{I_2} \supsetneq I_3 \supsetneq \dots$$

בסתירה לארטיניות.

בעזרת 1 של ההוכחה הקודמת,

$$\mathcal{A} = \{I \lhd R : I \text{ לא נוצר סופית}\}$$

R לא נתרי $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}\neq\emptyset$. (המובנה הזה נקרא אינדוקציה ארטינית)

כמו כן יש אינדוקציה נתרית: אם R נתרי משמאל/מימין אז לכל $\mathcal{A}\neq\emptyset$ קבוצה של אידאלים שמאליים/ימניים יש איבר <u>מקסימלי</u>

תרג 6 (הבהרה) נזכור מן השיעור הקודם שאם
$f:R\to S$ הינו הומו' של <u>חוגים</u> ואם M הינו
S-מודול, ניתן לתת ל-M מבנה של R-מודול ~~אז~~ ע"י

$$r\cdot m = \underbrace{f(r)}_{\in S}\cdot m$$

צ"ל מקיים את האקסיומות של מודולים:

3)

$$r_1(r_2 m) \overset{?}{=} (r_1 r_2)m$$

$$r_1(r_2 m) = r_1(f(r_2)\cdot m) = f(r_1)\big(f(r_2)\cdot m\big) = \big(\underbrace{f(r_1)}_{\in S}\cdot\underbrace{f(r_2)}_{\in S}\big)m \overset{f \text{ הומו'}}{=}$$

$$f(r_1 r_2)m = (r_1 r_2)\cdot m$$

במקרה שלנו: I הינו R-מודול. אך הכפל הסקלרי

$a\in I$

$$f(r)\cdot a = \boxed{(r+Ann_R(I))\cdot a = ra}$$

מוקדם הוכחנו שניתן לתת ל-I מבנה של $R/Ann_R(I)$-מודול

גדי' $f:R\to R/Ann_R(I)$ ההטלה הטבעית.

אם נתון ב-I כ-$R/Ann_R(I)$, המבנה של R-מודול

על I המתקבל מן ההומ' f שווה למבנה המקורי של I כ-R-מודול.

נניח בשלילה כי I נוצר סופית כ-R/P-מודול ($P=\mathrm{Ann}_R(I)$).

אזי קיימים $a_1,\dots,a_n\in I$ כך ש-

$$I=\{s_1a_1+\dots+s_na_n : s_i\in R/P\}$$

לפי אותו (על $f:R\to R/P$)

$$I=\{f(r_1)a_1+\dots+f(r_n)a_n : r_i\in R\}$$

$$=\{r_1a_1+\dots+r_na_n : r_i\in R\}$$

בסתירה להנחה כי I לא נוצר סופית מעל R.

המטרה הבאה שלנו היא להוכיח את משפט המיון של מודולים נוצרים סופית מעל תחומים ראשיים.

הערה: כיוון ש- ($\mathbb{Z}$-מודול) $\leftrightarrow$ (חבורה אבלית) ו-$\mathbb{Z}$ הינו תחום ראשי, נקבל בתור מקרה פרטי את משפט המיון של חבורות אבליות נוצרות סופית.

כמה הגדרות: יהי R חוג, M_1, M_2 R-מודולים.
נגדיר כפל סקלרי על החבורה האבלית $M_1 \times M_2$
על ידי
$$r\cdot(m_1,m_2) = (rm_1, rm_2).$$
בודקים שזה מקיים את האקסיומות של מודול.

טענה: יהי M R-מודול, ויהיו N_1, N_2 תת-מודולים.
נניח כי
1) $M=N_1+N_2$
2) $N_1\cap N_2=(0)$.
אזי $M\cong N_1\times N_2$.

הוכחה: נגדיר הומ' של R-מודולים $f: N_1\times N_2 \to M$
$$f(n_1,n_2)=n_1+n_2$$

f הומ' של R-מודולים: בודקים כי f הומ' של חבורות.
$$f(r(n_1,n_2)) = f(rn_1,rn_2) = rn_1+rn_2 = r(n_1+n_2) = r\cdot f(n_1,n_2).$$

f על בגלל תנאי 1): $M=N_1+N_2$, אז לכל $m\in M$ קיימים $n_1\in N_1$, $n_2\in N_2$ כך ש- $m=n_1+n_2=f(n_1,n_2)$.

<u>f חח"ע</u> $f(n_1,n_2)=0 \Rightarrow n_1+n_2=0 \Rightarrow n_1=-n_2\in N_2$

אך גם $n_1\in N_1 \Rightarrow n_1\in N_1\cap N_2 \overset{(\text{תנאי } 2)}{\Rightarrow} n_1=0 \Rightarrow n_2=0$.

<u>הגדרה</u> R-מודול M נקרא ציקלי אם הוא נוצר ע"י איבר אחד, כלומר קיים $m\in M$ כך ש-

$$M=Rm=\{rm : r\in R\}$$

<u>טענה</u> יהי M R-מודול. אזי M ציקלי אם ורק אם קיים אידיאל שמאלי $I\leq R$ כך ש- $M\simeq R/I$ כ-R-מודולים.

<u>אזהרה</u> R/I לאו בהכרח חוג, כי אם I איננו אידיאל ימני אין לנו כפל מוגדר היטב של מחלקות. אך I הינו תת-מודול של R (כמודול מעל עצמו) ולכן יש לנו מבנה של R-מודול על המנה R/I.

<u>הוכחה</u> ⇒) נניח $M\simeq R/I$. צריך להוכיח כי R/I ציקלי. כל איבר של R/I הינו $r+I=r(1+I)$

לכן R/I נוצר על ידי האיבר $1+I$.

$\Leftarrow$) נניח כי M ציקלי, אזי קיים $m\in M$ כך ש- $M=Rm$. נגדיר הומו' $f: R\longrightarrow M$

(הומו' של R-מודולים, כאשר R הינו מודול מעל עצמו) $f(r)=rm$

$r,s\in R$

$s\cdot f(r)=s(rm)=(sr)m=f(sr)$

ברור כי f על (כי $M=Rm$ ציקלי). לכן לפי משפט האיזו' הראשון $M\cong R/(\ker f)$.

$\ker f$ הינו תת-מודול של R (כי f היא הומו' של מודולים) לכן אידאל שמאלי. (שים לב: f לא הומו' של חוגים, לכן $\ker f$ לא בהכרח אידאל דו-צדדי).