(1) תזכורת: אם f היא פונ' אנליטית בתחום Ω ו $\gamma = \gamma(t) \mid a \le t \le b$ היא מסילה שמוכלת ב-Ω
ול-f יש פונקציה קדומה $F'(z)=f(z)$ בתחום Ω
אז

$$\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

דוגמא: נחשב את האינטגרל $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+1)}$ כאשר

γ נתונה לפי $\gamma(t)=it,\ -1\le t\le 1$

ראשית נפרק את הביטוי $\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$ לשברים

חלקיים ולכן $\dfrac{1}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}\right)$

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+1}$$

לפונ' $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ יש פונ' קדומה בתחום $\gamma \subset \Omega$
הנתונה לפי $F(z)=\log_R(z-1)$ כאשר $\log_R$ הוא
הענף של הלוגריתם המוגדר בקבוצה $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$.

לפונ' $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ יש פונ' קדומה בתחום $\gamma \subset \Omega$
הנתונה לפי $F(z)=\log(z+1)$ כאשר $\log$ הוא
הענף הראשי של הלוגריתם. ולכן

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log_R(z-1)\Big|_{z=-i}^{z=i} - \frac{1}{2}\log(z+1)\Big|_{z=-i}^{z=i} \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log_R(i-1) - \log_R(-i-1)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\log(i+1) - \log(-i+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|1-i| + i\,\mathrm{Arg}_R(i-1) - \ln|-1-i| - i\,\mathrm{Arg}_R(-i-1)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(i+1) - \ln|-i+1| - i\,\mathrm{Arg}(-i+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi i}{4} - i\,\frac{5\pi}{4}i\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi i}{4} - \left(-\frac{\pi i}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi i}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi i}{2}$$

<u>משפט ההערכה:</u> תהי γ עקומה ו- f פונקציה רציפה על γ אז מתקיים

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le ML$$

כאשר L הוא האורך של γ ו- M הוא חסם מלעיל ל- $|f|$ על γ.

<u>[illegible]:</u> נראה

$$\left|\int_C \bar{z}\, e^{z^2} dz\right| \le 2\pi e^{-e}$$

כאשר C הוא המעגל $|z|=1$.

③ פתרון: על המעגל C מתקיים $z=e^{i\theta}$, ולכן

$$\left|\bar{z}e^{z^2}\right| = \left|\overline{e^{i\theta}}\, e^{e^{2i\theta}}\right| = \left|e^{-i\theta} e^{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}\right|$$

$$= \left|e^{-i\theta}\right|\left|e^{\cos 2\theta + i \sin 2\theta}\right| = e^{\cos 2\theta} \le e$$

וממשפט ההערכה נקבל כי

$$\left|\int_C \bar{z} e^{z^2} dz\right| \le \max_{z\in C}\left|\bar{z}e^{z^2}\right|\cdot 2\pi = 2\pi e$$

ב'/שאלה: יהי Γ_r חצי המעגל $\Gamma_r = \{z : |z| = r, \operatorname{Im} z > 0\}$

הוכיחו כי $\lim\limits_{r\to\infty}\left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z^2+a^2}\right| = 0$ כאשר $a>0$ קבוע.

פתרון: על Γ_r מתקיים:

$$\left|\frac{1}{z^2+a^2}\right| \le \frac{1}{|z|^2-|a|^2} = \frac{1}{r^2-a^2}$$

והאורך של Γ_r שווה ל-πr, ולכן

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z^2+a^2}\right| \le \frac{\pi r}{r^2-a^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

(4) **משפט קושי**: תהי f פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר R. תהי γ עקומה סגורה ופשוטה ב-R (כלומר γ לא חותכת את עצמה) המכוונת נגד כיוון השעון ו-$\alpha \in D$ היא נקודה בתוך γ אז לכל $n \geq 0$

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)^{n+1}}$$

בפרט עבור $n=0$ נקבל $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\alpha}$

דוגמא: נחשב את האינטגרל $I = \int_C \frac{e^z\,dz}{z^4-1}$
כאשר

א. C הוא האליפסה $x^2+16y^2=4$

ב. C הוא המלבן שקודקודיו: $\pm\frac{1}{2} \pm 2i$.

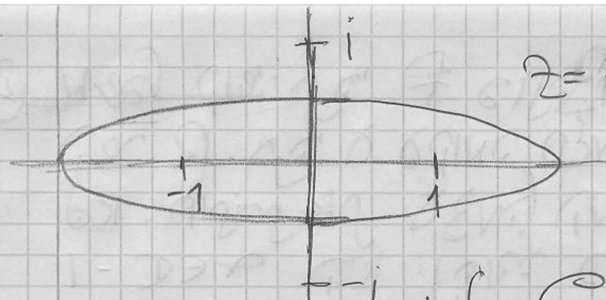
פתרון: ראשית נעזר בפירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{z^4-1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4i}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4i}\frac{1}{z-i}$$

לכן

$$\int_C \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = -\frac{1}{4}\int_C \frac{e^z}{z+1}\,dz + \frac{1}{4}\int_C \frac{e^z}{z-1}\,dz + \frac{1}{4i}\int_C \frac{e^z}{z+i}\,dz - \frac{1}{4i}\int_C \frac{e^z}{z-i}\,dz$$

(5)



א. כיוון שרק הנקודות $z=1$ ו- $z=-1$ נמצאות בתוך C אזי

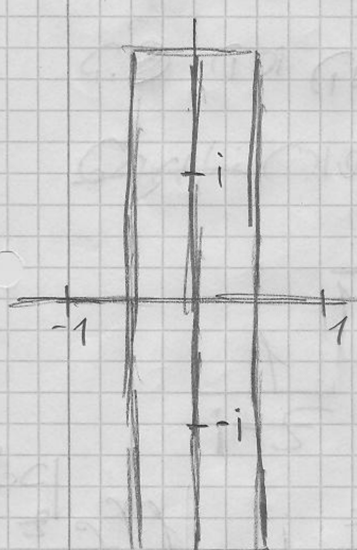
$$-i\int_C \frac{e^z}{z+i}\,dz = \int_C \frac{e^z}{z-i}\,dz = 0$$

$$-\frac{1}{4}\int_C \frac{e^z}{z+1}\,dz = -\frac{1}{4}2\pi i\, e^{-1}$$

$$\frac{1}{4}\int_C \frac{e^z}{z-1}\,dz = \frac{1}{4}2\pi i e$$

ולכן

$$\int_C \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \frac{\pi i}{2}\left(e-e^{-1}\right)$$



ב. כיוון שרק הנקודות $z=i$ ו- $z=-i$ נמצאות בתוך C אזי

$$\int_C \frac{e^z}{z-1}\,dz = \int_C \frac{e^z}{z+1}\,dz = 0$$

$$\frac{1}{4i}\int_C \frac{e^z}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{4i}e^{-i}$$

$$-\frac{1}{4i}\int_C \frac{e^z}{z-i}\,dz = -\frac{2\pi i}{4i}e^{i}$$

ולכן

$$\int_C \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \frac{\pi}{2}\left(e^{-i}-e^{i}\right)$$

$$= -\pi i \sin(1)$$