

קורס: 88-231-05
מרצה: ש. הורוביץ
כ"ד אלול תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. מצאו את כל הערכים ב- \mathbb{C} של $\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} \right]^{1/3}$.

2. נניח ש- $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה שלימה, ונניח שבכל מקום $u_x = u_y$. הוכיחו שבהכרח f פונקציה ליניארית מהצורה $f(z) = az + b$.

3. חשבו: $\int_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2} dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

4. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $f(z)$ פונקציה שלימה ולא קבועה. הוכיחו כי הטווח $f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ צפוף ב- \mathbb{C} .

6. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה הסגור $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ונניח שעבור $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $f(e^{i\theta}) \neq 0$ וגם $-\pi/2 \leq \arg f(e^{i\theta}) \leq \pi$. הוכיחו כי $f(z) \neq 0$ לכל z כך ש- $|z| < 1$.

בהצלחה!