

# אלגברה מופשטת - תרגיל 4

## שאלה 1

נתונה התמורה הבאה בחבורה  $S_9$ :  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

- רשמו את  $\sigma$  כמכפלת מחזורים זרים.
- מצאו את הסדר של  $\sigma$ .
- האם  $\sigma \in A_9$ ? הסבירו.
- מהו הסדר של  $\sigma^{14}$ ?
- מצאו את  $\sigma^{-1}$  וכתבו אותה כמכפלת מחזורים זרים.

## שאלה 2

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

- קיים אפימורפיזם מהחבורה  $S_{14}$  לחבורה מסדר 34.
- קיים אפימורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$ .
- קיים אפימורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ .
- קיים איזומורפיזם  $\varphi: D_6 \rightarrow \Omega_{12}$ .
- קיים מונומורפיזם  $\varphi: A_4 \rightarrow S_5$ .
- קיים מונומורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_4$ .

## שאלה 3

- האם החבורה  $U_{14}$  איזומורפית לחבורה  $U_{18}$ ?
- האם מספר האפימורפיזמים  $\mathbb{Z} \rightarrow \Omega_4 \times \Omega_5$  גדול ממספר האוטומורפיזמים של  $\mathbb{Z}_{20}$ ?

## שאלה 4

בסעיפים הבאים תנו דוגמה שמפריכה את הטענות השגויות הבאות:

- כל חבורה מסדר 16 היא אבלית.
- תהינה  $A, B < G$ . אם  $G/A \cong B$ , אז  $G/B \cong A$ .
- תהינה  $A, B < G$ . אם  $G/A \cong G/B$ , אז  $A \cong B$ .

## שאלה 5

מצאו את  $Z(S_3)$ . האם אתם יכולים למצוא את המרכז של  $S_3$  ללא חישוב ישיר, אלא בעזרת טענות מהתירגול, בהסתמך על כך שהחבורה  $S_3$  אינה אבלית?

## שאלה 6

נסתכל בתתי-חבורה נורמלית של המספרים הרציונליים  $(\mathbb{Q}, +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$ .

א. הוכיחו כי בחבורת המנה  $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תתי-חבורה של  $G$  שנוצרת על ידי המחלקות של  $\frac{1}{10}$  ו- $\frac{3}{8}$  היא ציקלית.

כלומר יש להוכיח  $\langle \frac{1}{10} + \mathbb{Z}, \frac{3}{8} + \mathbb{Z} \rangle = \langle a + \mathbb{Z} \rangle$  עבור  $a \in \mathbb{Q}$  כלשהו.

ג. מהו הסדר של תתי-חבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב- $G$ ?

## שאלה 7

א. תהי  $H \leq G$ . הראו  $H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$  ותנו דוגמה שבה ההכלה אמיתית.

ב. תהי  $N \triangleleft G$ . הראו  $Z(N) \triangleleft G$ .

בסעיפים הבאים תנו דוגמה לחבורה  $G$  ולתתי-חבורה  $H \leq G$  שמקיימות:

ג. הכלה ממש  $Z(H) \subset Z(G)$ .

ד. הכלה ממש  $Z(G) \subset Z(H)$ .

ה.  $Z(G)$  לא מכיל את  $Z(H)$  ולא מוכל בו.

**בהצלחה!**