

תרגילים מבגרויות

מרוכבים

1. מבחן 035582 מועד קיץ 2021.

3. נתונה המשוואה $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה $z^n = c$.

ד. מצא את n ואת c .

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה $z^n = c$ שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

3. נתונה משוואה I : $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$. הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

נתונה משוואה: $z^3 = a + bi$. הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a = 0$, $b > 0$

2. $a < 0$, $b = 0$

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$

נתונה משוואה II : $z^3 = 2(w_1 + w_2)$, w_1 ו- w_2 הם הפתרונות של משוואה I .

ג. פתור את משוואה II .

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה $u = di$, הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

3. מבחן 035582 מועד ב קיץ 2021.

3. נתונה משוואה I : $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II : $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b , אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים

והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I .

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

4. מבחן 035582 מועד חורף 2021.

3. נתונה המשוואה $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w .

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

נתון: $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו

לאחר ההכפלה ב- w .

5. מבחן 035582 מועד נבצרים חורף 2021.

3. א. נתון מספר מרוכב $z = r \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$.

הסבר מדוע מתקיים: $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$.

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

3. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

$$\text{נתון: } z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3},$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

$$\text{נתון: } w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2.$$

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל

בעל n קודקודים.

3. א. פתור את המשוואה $z^3 = -1$ (הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.

ב. a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא $2i$.

ג. הראה כי לכל n טבעי $a_{n+4} = 16a_n$.

ד. הנקודות A, B, C, D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה a_1, a_2, a_3, a_4 בהתאמה.

א. a_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^3 = -1$.

ב. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ג. (1) סרטט סקיצה של המרובע $ABCD$.

(2) מצא את שטח המרובע $ABCD$.

ד. הנקודות A', B', C', D' מייצגות את איברי הסדרה a_5, a_6, a_7, a_8 בהתאמה.

מצא את היחס בין שטח המרובע $A'B'C'D'$ ובין שטח המרובע $ABCD$ $\left(\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}\right)$. נמק.

3. א. (1) הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(2) הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה, אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב. (1) הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(2) z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה.

נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו- z_2 הם חיוביים.

הוכח כי אם: $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ הוא מספר מרוכב. נתון: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{w}$ והאיבר השני הוא w .

נתון כי סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית שווה ל-0.

ג. (1) הבע באמצעות α את מנת הסדרה, והסבר מדוע כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

(2) מצא את α (מצא את שתי האפשרויות).

3. נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 והאיבר השני שלה הוא iz (z הוא מספר מרוכב). נתון כי הסדרה איננה קבועה.

א. (1) רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).

(2) הוכח כי סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, והיא מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שפתרת בתת-סעיף ב (2).

ABO הוא משולש שווה צלעות במישור גאוס (O – ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).

3. א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$. z הוא מספר מרוכב.
- ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.
(2) הראה כי כל הפתרונות של המשוואה בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי שמצאת בתת-סעיף ב(1).
- ג. (1) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית 45° (נגד כיוון השעון). נתון שכל אחת מן הנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב מתאימה למספר המקיים את המשוואה $z^4 = a$.
מצא את a .
- (2) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית α (נגד כיוון השעון).
הוכח שסכום המספרים המתאימים לנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב שווה ל-0.

חדוא

1. מבחן 035582 מועד קיץ 2021.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x = \frac{\ln(a)}{2}$.

מצא את שיעור הישר y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

5. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

ג. בעבור כל x המקיים $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^3}$

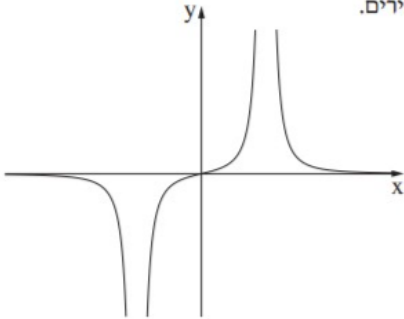
א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x) = f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^1 f(x) dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$, $x = -1$.

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$. $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.

5. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$, $n \geq 1$, הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

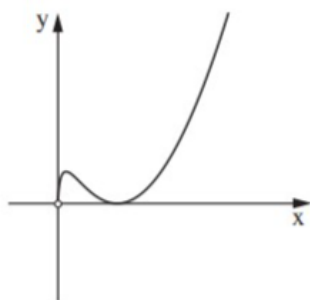
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

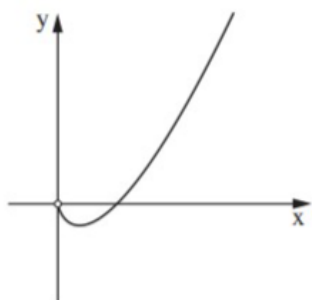
ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 1$, איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 2$ ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n = 3$.

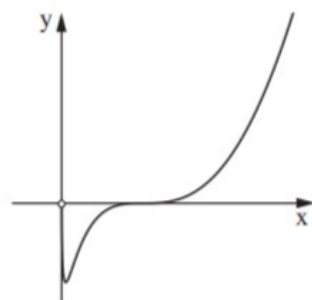
נמק את קביעותיך.



גרף ג



גרף ב



גרף א

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{e}$ ו- $x = \frac{1}{e^2}$.

5. מבחן 035581 מועד מיוחד קיץ 2021.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k) = 1$, $t < k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k f(x) dx \quad \text{או} \quad \int_t^k (f(x))^2 dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -1$ ו- $x = -8$.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$ המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות b , אם יש צורך.

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x + a)$, a הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y .

- ב. (1) מצא את a , ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו- b .
- (2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה- x .

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.
 ענה על סעיפים א-ג עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .
 (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.
 ענה על סעיף ד עבור $a = 0$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b < 0$ מתקיים: $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. k הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k ? נמק.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר). מצא את k . נמק.
- ג. נגדיר $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$, $e^{-1} \leq x < e$.
 (1) לפיך שלושה ערכי x , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.
 $x = \frac{1}{2}$ (I) $x = 1$ (II) $x = 2$ (III)
 (2) הסבר מדוע בעבור כל $e^{-1} \leq x < e$ מתקיים: $T(x) < 1$.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה,

והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

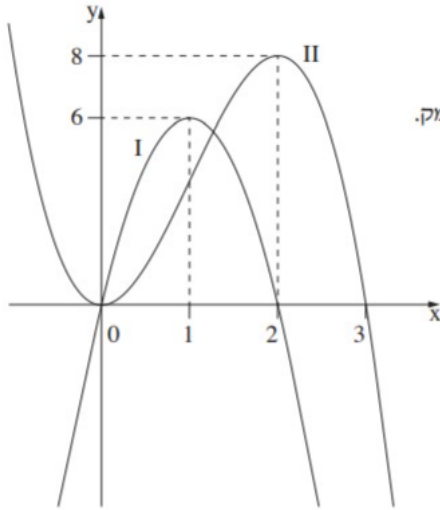
ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x = a$, $a > 1$,

שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5. הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$.



אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו-II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ell \circ f(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$.

ענה על סעיפים א-ה בעבור התחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x) + b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .

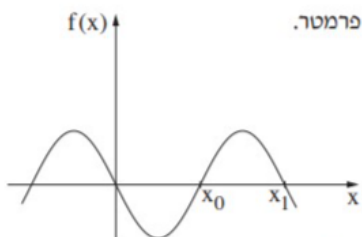
מצא את b .

ו. מצא בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

5. נתונה הפונקציה $f(x) = e^x(x - 5)$, המוגדרת לכל x .
- א. הראה כי $f'(x) = e^x(x - 4)$ וכי $f''(x) = e^x(x - 3)$.
- ב. $f^{(n)}(x)$ היא הנגזרת מסדר n של $f(x)$ (למשל $f^{(3)}(x) = f'''(x)$). נתונה החוקיות: $f^{(n)}(x) = e^x(x - 5 + n)$ בעבור כל n טבעי. מצא את $f'''(x)$, והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה.
- ג. ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות n .
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f^{(n)}(x)$ עם הצירים.
 (2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f^{(n)}(x)$.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f^{(n)}(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 (4) הראה כי הגרפים של הפונקציות $f^{(m)}(x)$ ו- $f^{(k)}(x)$ אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים m ו- k .
 (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, ו- $f''(x)$, וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- ד. הסתמך על החוקיות הנתונה, ומצא לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה, $F(x)$, אם נתון כי הגרף של הפונקציה $F(x)$ עובר בראשית הצירים. אמת את תשובתך על ידי גזירה.

7. לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותך את ציר ה- x גם בנקודות שבהן $x = x_0$ ו- $x = x_1$, כמתואר בציר.



אחת המשוואות שלפניך (IV-I) מתארת את הפונקציה $f(x)$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

I. $y = a^2 \sin x$

II. $y = a \sin 2x$

III. $y = a^2 \cos x$

IV. $y = a \cos 2x$

א. (1) קבע איזו מן המשוואות IV-I היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

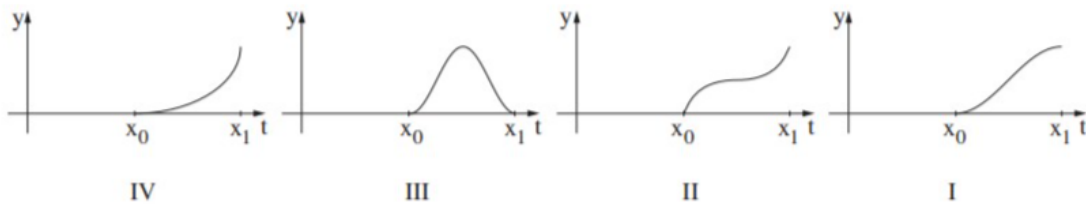
(2) קבע מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר a . נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ושל x_1 ?

ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $x_0 \leq x \leq x_1$.

נסמן: $S(t) = \int_{x_0}^t f(x) dx$. נתון: $x_0 \leq t \leq x_1$.

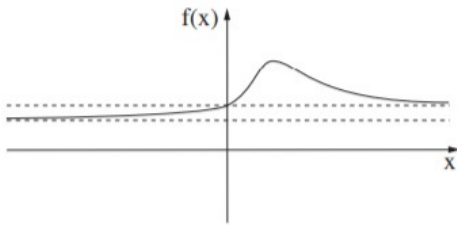
ג. לפניך ארבעה גרפים (IV-I). איזה מן הגרפים IV-I מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



5. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ושיעורי הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:



אסימפטוטה שמשוואתה היא $y = 1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y כאשר $y = 1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

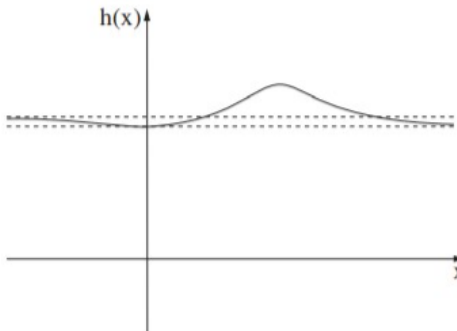
(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמק.



4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{a}{x-1}} + c$, a ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא $y = 1$,

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, e^{-4})$.

ב. מצא את הערך של c ואת הערך של a .

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה $x = -1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה. המשיק עובר בראשית הצירים.

הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y

קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$ שתחום הגדרתה הוא $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2 - 1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה- x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 - 1}}$?

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, המוגדרת לכל x .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) הוכח כי $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

(2) הסבר מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ המוגדרת לכל x .

(1) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) $a > 1$ הוא פרמטר.

היעזר בנגזרת הפונקציה $f(x)$ והראה כי נפח גוף הסיבוב של השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = \ln a$ שווה ל- $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. פרט את חישוביך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x בתחום הנתון.
 (3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בתחום הנתון.
 (4) קבע אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- x שעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = -\frac{1}{3}x$.

(2) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

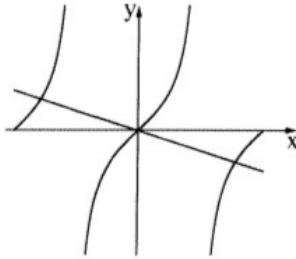
$$g(x) = \tan x \quad \text{ו} \quad h(x) = -\frac{1}{3}x$$

בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

היעזר בציור,

וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$

מקיימות $f'(x) = 0$.

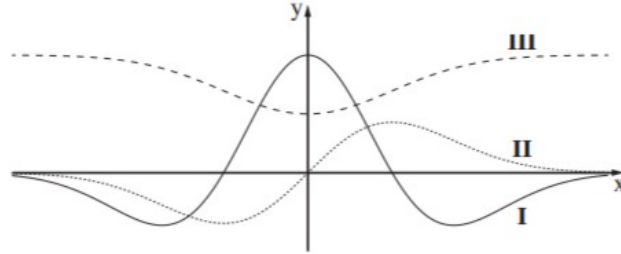


נתון: שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- ג. (1) מה הם שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.
 ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.
 (2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

5. לפניך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות f , f' , f'' , המוגדרות לכל x .
 הגרף III נמצא כולו מעל הגרף II.



- א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות f , f' , f'' .
 נמק את קביעתך.
 הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
 נתון כי $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.
 ב. מצא בעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מינימלי, ובעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
 נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל- $1 + \frac{1}{2e}$.
 ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

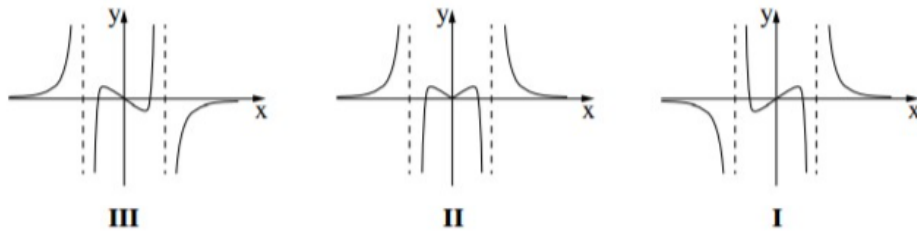
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניך גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



5. $f(x)$ היא פונקציה גזירה לכל x בתחום ההגדרה שלה.
- א. הראה שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $e^{f(x)}$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x , ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).
- נתון כי $f(x) = x \ln(x^n)$. n הוא פרמטר טבעי.
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. התייחס לערכים שונים של n .
- ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . התייחס לערכים שונים של n .
- נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.
- ד. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
 (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $n = 2$.
- ה. היעזר בתשובתך על סעיף א, מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $e^{x \ln(x^n)}$ (n טבעי), וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).