חשבון אינפי 2 למדמ"ח

תרגיל 1- פתרון

1. הוכיחו : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ נקבל $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1^2$, כלומר בסיס האינדוקציה מתקיים

הנחת האינדוקציה: נניח $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

נוכיח : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

כדרוש. (המעבר השני לפי הנחת האינדוקציה)

2. חשבו את האינטגרלים הבאים לפי הגדרה של אינטגרל מסוים :

א. $\int_1^3 (x^2-x-2)dx$

פתרון: הפונקציה $f(x) = x^2-x-2$ רציפה בקטע $[1,3]$ ולכן אינטגרבילית בו ולכן ניתן לבחור כל חלוקה של הקטע הנ"ל לחישוב האינטגרל.

נבחר חלוקה שווה כך ש- $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. בכל תת קטע נבחר נקודת קצה ימני בתור α_k, כלומר $\alpha_k = 1 + \frac{2k}{n}$ ונקבל

$$\int_1^3 (x^2-x-2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{2k}{n}\right) - 2\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n} + \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n}n\right) = \frac{4}{2} + \frac{8\cdot 2}{6} - 4 = \frac{2}{3}$$

ב. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$ (רמז: השתמשו בנקודות $\frac{4k^2}{n^2}, k=0,1...,n$ כנקודות החלוקה)

פתרון:

$\frac{4k^2}{n^2}, k=0,1...,n$ נקודות החלוקה

$\triangle x_k = \frac{4k^2}{n^2}-\frac{4(k-1)^2}{n^2}$ אורך תת קטע $[x_{k-1},x_k]$

$\alpha_k = \frac{4k^2}{n^2}$ קצה ימני של תת קטע $[x_{k-1},x_k]$ שנציב בפונקציה לחישוב של סכום רימן.

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k^2}{n^2}}\left(\frac{4k^2}{n^2}-\frac{4(k-1)^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\frac{4}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k^2}{n^3}-\frac{8k}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

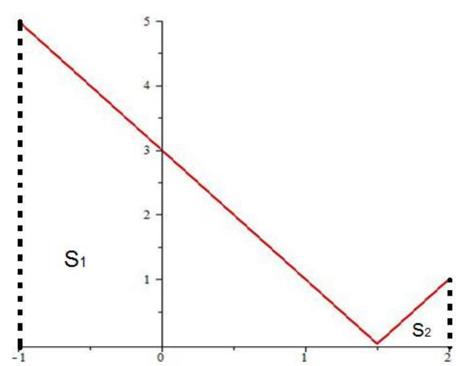
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{16\cdot 2}{6}-0=\frac{16}{3}$$

3. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות השטח המתאימות מהנדסת המישור:

א. $\int_{-1}^{2}|2x-3|dx$

פתרון:

האינטגרל הנ"ל שווה לסכום של שני שטחי משולשים המתוארים בגרף:



שטח המשולש השמאלי $S_1 = \frac{5\cdot\left(\frac{3}{2}-(-1)\right)}{2} = \frac{25}{4}$

שטח המשולש הימני $S_2=\dfrac{1\cdot\left(2-\dfrac{3}{2}\right)}{2}=\dfrac{1}{4}$

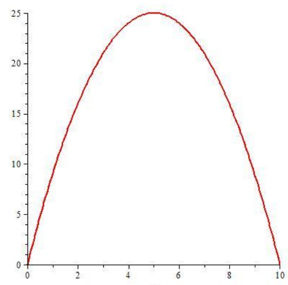
ולסיכום נקבל $\int\limits_{-1}^{2}|2x-3|dx=S_1+S_2=\dfrac{25}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}$

ב. $\int\limits_{0}^{10}\sqrt{10x-x^2}dx$ (רמז: השלימו לריבוע)

פתרון: $\int\limits_{0}^{10}\sqrt{10x-x^2}dx=\int\limits_{0}^{10}\sqrt{25-\left(25-10x+x^2\right)}dx=\int\limits_{0}^{10}\sqrt{25-(x-5)^2}dx$

וזהו שטח של חצי עיגול שמרכזו בנקודה $(5,0)$ ורדיוסו 5 ולכן

$$\int\limits_{0}^{10}\sqrt{10x-x^2}dx=\int\limits_{0}^{10}\sqrt{25-\left(25-10x+x^2\right)}dx=\int\limits_{0}^{10}\sqrt{25-(x-5)^2}dx=\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2=\frac{25\pi}{2}$$



4. הוכיחו: אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו- $c\in\mathbb{R}$ קבוע, אז cf אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים: $\int\limits_a^b cf(x)dx=c\int\limits_a^b f(x)dx$.

הוכחה: תהי T חלוקה נורמלית של $[a,b]$, כלומר $\max\triangle x_k=\mu(T)\to 0$

לפי הגדרה של אטינטגרל מסוים נקבל

$$c\int\limits_a^b f(x)dx=c\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\triangle x_k=\lim_{\mu(T)\to 0}c\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\triangle x_k=\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}cf(\alpha_k)\triangle x_k=\int\limits_a^b cf(x)dx$$

המעבר הראשון (משמאל ימנה) נכון לפי הגדרה של אינטגרל מסוים (נתון שהפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$)

המעבר השני- לפי תכונת הגבול

המעבר האחרון – זוהי בדיוק הגדרה של אינטגרל מסוים.

ולכן cf אינטגרבילית ב-$[a,b]$ כדרוש.

5. הוכיחו: אם $f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ואי זוגית, אזי $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

הוכחה: $f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע ולכן האינטגרל $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ אינו תלוי בבחירה של חלוקה נורמלית של הקטע $[-a,a]$ וגם לא בבחירת הנקודות α_k בכל תת קטע של החלוקה. לכן נבחר חלוקה נורמלית

$T_1 : 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a$ של הקטע $[0,a]$

ו-$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כשלהי וכן נבחר חלוקה $T_2 : -a = -x_n < -x_{n-1} < -x_{n-2} < \ldots < -x_1 < 0$ של הקטע $[-a,0]$ ו- $-\alpha_k \in [-x_k, -x_{k-1}]$

החלוקה $T = T_1 \cup T_2$ היא חלוקה נורמלית של $[-a,a]$ ולכן לפי הגדרה של אינטגרל מסוים נקבל:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\vartriangle x_k + f(-\alpha_k)\vartriangle x_k\right) = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\vartriangle x_k - f(\alpha_k)\vartriangle x_k\right) = 0$$

במעבר האחרון השתמשנו באי זוגיות של הפונקציה.

מש״ל

6. שאלה ממבחן –תשע״ד

הוכיחו:

א. $$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right) \le \ln 2 \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$$

הוכחה: נסתכל על החלוקה $T : 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$ של הקטע $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$. זוהי פונקציה רציפה בקטע הנ״ל ולכן אינטגרבילית בו.

נשים לב ש- $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{4}\inf_{x\in I_k}\left(\frac{1}{1+x}\right)\cdot\vartriangle x_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)$ כלומר זהו סכום דרבו התחתון של הפונקציה עבור החלוקה הנ״ל. הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן האינפימום של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה הימני שלו.

$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{4}\sup_{x\in I_k}\left(\frac{1}{1+x}\right)\cdot\vartriangle x_k = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$ כלומר זהו סכום דרבו העליון של הפונקציה עבור החלוקה הנ״ל. הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן הסופרימום של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו.

בנוסף $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2$ וכן $\underline{S}(T) \le \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \le \overline{S}(T)$, כלומר

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right) \le \ln 2 \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$ כדרוש.

ב. $\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{2}\right)\le \pi \le \left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$

הוכחה: נסתכל על החלוקה $T: 0<0.25<0.5<0.75<1$ של הקטע $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בקטע $[0,1]$. זוהי פונקציה רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו.

נשים לב ש- $\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\inf_{x\in I_k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\triangle x_k=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{2}\right)$

כלומר זהו סכום דרבו התחתון של הפונקציה עבור החלוקה הנ"ל. הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן האינפימום של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה הימני שלו.

$\overline{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\sup_{x\in I_k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\triangle x_k=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$ כלומר זהו סכום דרבו העליון של הפונקציה עבור החלוקה הנ"ל. הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן הסופרימום של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו.

בנוסף $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$ וכן $\underline{S}(T)\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\overline{S}(T)$, כלומר

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{\pi}{4}\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$$

נכפול ב- 4 ונקבל את אי השוויון המבוקש.

7. השתמשו באינטגרלים מסוימים מתאימים על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

פתרון: $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}$

שימו לב הוספנו מחובר $\sin\frac{\pi n}{n}=\sin\pi=0$.

נגדיר $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$. $f(x)$ רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו.

$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x$ כאשר $\Delta x=\frac{\pi}{n},\ \alpha_k=\frac{\pi k}{n}\in[x_{k-1},x_k],\ x_k=\frac{\pi k}{n}, 1\le k\le n$

ולכן לפי הגדרה של האינטגרל המסוים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$

ב. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$

פתרון:

נסתכל על הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ בקטע $[0,1]$. זוהי פונקציה רציפה בקטע סגור ולכן אינטגרבילית בקטע . נבחר חלוקה שווה של הקטע כך ש-

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ \alpha_k=\frac{k}{n}\in[x_{k-1},x_k],\ x_k=\frac{k}{n},1\le k\le n$$

נבנה סכום רימן מתאים $\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$ ולפי ההגדרה של אינטגרל מסוים נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+...+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}$$

8.

א. הוכיחו כי $0<\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}<\frac{1}{8}$

הוכחה: $0<\frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}}<x^7$ לכל $0<x\le 1$ ולכן $0<\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}<\int_0^1x^7dx=\frac{x^8}{8}\Big|_0^1=\frac{1}{8}$. מש"ל

ב. קבעו אם ערך האינטגרל $\int_{-2}^{2}\frac{x^3-9}{|x|+1}dx$ הוא חיובי או שלילי.

פתרון: נשים לב ש- $\frac{x^3-9}{|x|+1}<0$ לכל $-2\le x\le 2$ ולכן $\int_{-2}^{2}\frac{x^3-9}{|x|+1}dx<0$