שיעורי בית מספר 1

1. מצאו ע"ע ומ"ע של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. קבעו האם היא לכסינה ובמידה וכן מצאו מטריצה מלכסנת וצורה אלכסונית שהיא דומה לה.

2. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ דומות. הוכיחו כי

   (א) $\det A = \det B$

   (ב) $tr(A) = tr(B)$

   (ג) המטריצות A^t, B^t דומות.

3. ראיתם כי יחס דימיון מטריצות על $\mathbb{F}^{n\times n}$ הוא יחס שקילות. מצאו מטריצה $A \neq 0, I$ כך שבמחלקת השקילות שלה יש מטריצה אחת (כלומר ש A היא המטריצה היחידה שדומה לעצמה).

4. הוכיחו כי כל מטריצה משולשית עליונה דומה למטריצה משולשית תחתונה (וגם להיפך). הדרכה: העיזרו ב $P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

5.

   (א) יהיו A, B דומות. ראינו שיש להם אותו פ"א ולכן אותם ע"ע. הוכיחו כי לכל ע"ע λ של שתיהם מתקיים כי הר"ג של λ כע"ע של A שווה לר"ג של λ כע"ע של B. כלומר הראו כי $\dim N(A-\lambda I) = \dim N((B-\lambda I))$

   (ב) קבע מי מהמטריצות הבאות דומות

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, , A_3 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששווה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

7. תהא $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ שדומה למטריצה האלכסונית $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$. חשבו את A^{100}. הדרכה: היעזרו בכך ש A^{100} דומה ל D^{100} (ע"י איזה מטריצה?)

8. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:

$$a_{-1} = -1$$
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$\forall n \geq 2 \; a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n \geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.