השלמה להרצאה הראשונה בנושא נורמה

בועז צבאן

18 בדצמבר 2011

סיימנו את השיעור עם המסקנה הבאה:

מסקנה 0.1 יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי B בסיס אורתונורמלי שלו. אזי: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=[u]_B^t\,\overline{[v]_B}$.

כעת נראה שנובע מזה משפט המכליל את משפט פיתגורס. לשם נוחיות, נקרא גם לו "משפט פיתגורס", למרות שהאלגברה הלינארית לא היתה קיימת בזמנו, וממילא גם לא המשפט כפי שהוא מנוסח כאן.

משפט פיתגורס: יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי שלו.
לכל $v\in V$, נציגו $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$. אזי:

$$\|v\|^2=\|\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n\|^2=|\alpha_1|^2+\dots+|\alpha_n|^2 .$$

הוכחה: מהמסקנה לעיל,

$$\|v\|^2=[v]_B^t\,\overline{[v]_B}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\overline{\alpha_1}\\ \vdots\\ \overline{\alpha_n}\end{pmatrix}=\alpha_1\overline{\alpha_1}+\dots+\alpha_n\overline{\alpha_n}=|\alpha_1|^2+\dots+|\alpha_n|^2 .$$

■

למשל, עבור $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית והבסיס הסטנדרטי $B=\{(1,0),(0,1)\}$ נקבל:

$$\|(x,y)\|=\|xe_1+ye_2\|^2=x^2+y^2 .$$

זה משפט פיתגורס הקלאסי, האומר שריבוע אורך היתר-הוקטור (x,y)-שווה לסכום ריבועי הניצבים-הוקטורים $(0,y),(x,0)$.

נסיים בציטוט שלא היה.

נתניהו: "צריך לנרמל את היחסים שלנו עם טורקיה. צריך לנרמל את ארדואן. פשוט לכפול אותו בסקלר שונה מאפס... במחשבה שניה, לא אכפת לי שיכפלו אותו גם באפס."