תרגיל 2

1. יהיו R,S חוגים עם יחידה ו$\varphi : R \to S$ הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. הוכיחו את הטענות הבאות:

   (א) לכל $x \in R$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

   (ב) אם $x \in R$ הפיך, אז $\varphi(x)$ הפיך, וכן $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

   (ג) אם $x \in R$ נלפוטנט, אז $\varphi(x)$ נלפוטנט.

   (ד) אם φ אפימורפיזם, אז $\varphi[Z(R)] \subseteq Z(S)$.

2. נסמן $R = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
   מצאו כמה הומומורפיזמים של חוגים $\psi\colon \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] \to R$ ישנם. רמז: הפתרון תלוי רק בתמונה $\psi(\sqrt[3]{2})$.

3. יהיו $\{S, R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה. תזכורת $\Pi_{i\in I}R_i = \{(a_i)_{i\in I} | \forall i \in I, a_i \in R_i\}$

   (א) נגדיר $\pi_i : \Pi_{i\in I}R_i \to R_i$ ע"י $\pi_i(a_j) = a_i$. (הטלה על הרכיב הi). הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

   (ב) תהי $\varphi : S \to \Pi_{i\in I}R_i$ העתקה. הוכיחו שφ הומומורפיזם אמ"ם לכל i, $\pi_i \circ \varphi : S \to R_i$ הומומורפיזם.

   (ג) תנו דוגמא לשני חוגים עם יחידה, A, B כך שקיים הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה $\varphi : A \to B$, ואין הומורפיזם של חוגים עם יחידה $\psi : A \to B$.

4. יהי R חוג. הוכיחו $I = \{f \in R[x] | f(212) = 0\} \lhd R[x]$.

5. בכל סעיף, קבעו האם I אידיאל של R. במידה ולא, האם הוא אידאל ימני? שמאלי?

   (א) $R = \mathbb{R}[x], I = \mathbb{R}_n[x]$ (כל הפולינומים עד דרגה n).

   (ב) $R = M_2(\mathbb{Z}).I = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 4\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 4\mathbb{Z} \end{pmatrix}$

   (ג) $R = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (מטריצות משולשיות עליונות מעל חוג נתון)

6. יהיו $\{R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה.

(א) יהיו $I_i \trianglelefteq R_i$. הוכיחו: $\Pi I_i \trianglelefteq R_i$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: כל אידיאל של המכפלה האינסופית ΠR_i הוא מהצורה ΠI_i עבור $I_i \trianglelefteq R_i$?

7. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing \neq I \subseteq P(X)$ תת־קבוצה לא ריקה.

(א) נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A, B \in I$ גורר $A \cup B \in \tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $\tau \ni B \supseteq A$ גורר $A \in I$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם I סגורה לאיחוד והכלה.

(ב) נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-I אידאל אם רק אם קיים $C \subseteq X$ כך ש-$\tau = P(C)$.

(ג) מצאו אידאל I של $(P(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

8. יהי R חוג ו$I, J \trianglelefteq R$. הוכיחו: $I \cup J \trianglelefteq R$ אמ"ם $I \subseteq J \vee J \subseteq I$.