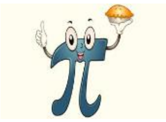
מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 2



יום π שמח !

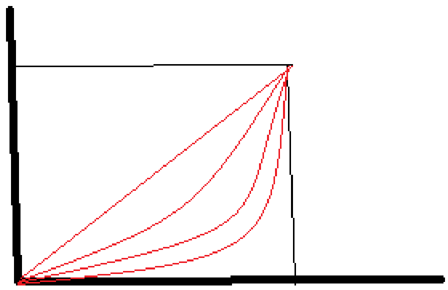
דוגמה: ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש

$$\begin{cases} f_n \overset{d_1}{\to} \theta \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2) \coloneqq \int_0^1 |f_1(x)-f_2(x)|dx$ $\qquad$ $d_{max}(f_1,f_2) \coloneqq \max\limits_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\qquad$ $f_n(x)=x^n\, , x\in[0,1]$ $\quad$ $\theta(x)=0$



$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1 |f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$f_n \overset{d_1}{\to}\theta \qquad \lim_{n\to\infty} d_1(f_n,\theta)=0$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta)=\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0(x)|=\max_{0\le x\le 1}x^n=1\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta)\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow}\theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a,b]$, $a<b$.

הגדרות:

א) נניח d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אומרים ש – **d דומיננטי ביחס ל – ρ** אם:

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$.

ב) אומרים ש - **$d \sim \rho$ ("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

תכונות פשוטות:

1) $d \sim c \cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho \le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל $\rho -$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 1-0 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 1-0 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

דוגמה: d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

הסבר: מ"ל – $d_1 \le c \cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1 \le c \cdot \|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b max|f(x)|dx \le \underbrace{(b-a)}_{c>0\ \text{קבוע}} \cdot \underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

דוגמה: $X \coloneqq \mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max} \sim d \sim d_1}$

הסבר: $\boxed{d_{max} \le d \le d_1 \le n \cdot d_{max}}$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

בהמשך נוכיח – הטופולוגיות שוות!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X,d))

נגדיר טופולוגיה של (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב X. נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{\text{קבוצות פתוחות ב } (X,d)\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

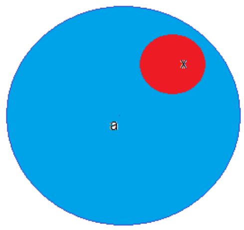
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

<u>משפט:</u> $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$.

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



<u>הוכחה:</u> <u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ x \in B_r(a) \text{ כי}}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

<u>תוצאה:</u> {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(top(d))$

$$top(d) \ni O = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלכל מרחב $(X, top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset, X \in top(d)$

t_2) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

t_3) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

<u>הערה:</u> $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

<u>משפט (תכונת Hausdorff):</u>

נניח (X, d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות <u>שונות</u> יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק !

אם נניח <u>שלא</u>: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

<u>משפט (יחידות הגבול):</u> במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>**הוכחה:**</u> אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $\forall y \in \mathbb{R}$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to (1, y)$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

<u>**הערה:**</u>

ב (X,d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ $(d(x_n,a) \overset{\mathbb{R}}{\to} 0)$.

2) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, n > N : d(x_n, a) < \epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $\mathrm{B}(\mathrm{a},\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב – O.

הגדרה: ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c := X \setminus C \in top(d)$

למשל: $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

טענה: איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X,d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב X אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש גבול ב-X.

הגדרה: מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

- $(C[a,b], \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b], \|\cdot\|_1), (C[a,b], \|\cdot\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty := \left\{x=(x_1,x_2,\dots)\middle|\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| < \infty\right\}$ מרחב Banach

מרחב Banach של סדרות **<u>חסומות</u>**.

<u>הכללה:</u> מרחב <u>פונקציות חסומות</u> על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S\to\mathbb{R} | \mathbb{R}-\text{חסום ב } f(S)\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S}|f(x)|$$

<u>2 מקרים פרטיים:</u>

1) $S=\mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S=\{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

<u>דוגמה:</u> $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p=3$: $x_n = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X **(פרטים בתרגול).**

<u>הערה:</u>

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

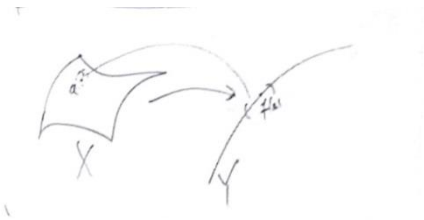
1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח (Y,d_Y) תת מרחב מטרי של (X,d). אז אם (Y,d_Y) שלם אז Y <u>סגורה</u> ב $X-$.

<u>רמז:</u> <u>תת קבוצה</u> היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X,d), (Y,ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a \in X}$ אם:



$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(a), f(x)\big) < \epsilon}$$

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

נסמן: $f \in C(X,Y)$. אם $Y = \mathbb{R}$ אז נסמן: $f \in C(X)$.

הגדרה: אומרים ש – f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב a. ז"א

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta: d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \epsilon$$

$$\boxed{f \in UC(X,Y)}$$

הגדרה: אומרים ש – f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $0 < c$ אם:

$$\boxed{\forall x_1,x_2 \in X: \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq c \cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן $\boxed{f \in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y) \subset UC(X,Y) \subset C(X,Y)}$

דוגמאות מאנליזה:

רציפה אבל לא במ"ש $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך ! תנו דוגמה).

<u>סימון:</u> אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d)\simeq(Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d)\simeq(X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d)\simeq(Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho)\simeq(X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases}(X_1,d_1)\simeq(X_2,d_2)\\(X_2,d_2)\simeq(X_3,d_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1)\simeq(X_3,d_3)$ (ההרכבה)

<u>דוגמאות:</u>

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x)=v+x$ $T_v\colon E\to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E,r))=B(v,r)$. לכן $B(v,r)\simeq B(u,r)$ $\forall u,v\in E$.

2)) $(\|\cdot\|\colon E \to [0,\infty)$ ‏ $Lip_1(E,\mathbb{R})\ni f\colon E\xrightarrow{\|\cdot\|}[0,\infty)$, כאשר E מרחב נורמי.

<u>הסבר:</u> $\big|\|u\|-\|v\|\big| \underbrace{\le}_{c=1} \|u-v\|$

3) $Lip_1(X,\mathbb{R})\ni f_A\colon X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f_A(x)=d(x,A)$

<u>הסבר:</u> שימוש באי שוויון $|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$

<u>משפט (עיקרון $Heine$):</u> נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f\colon X\to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n\xrightarrow{d}a \Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O\in top(\rho)\colon f^{-1}(O)\in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

<u>משפט (השוואת טופולוגיות):</u> נניח ש - d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho)\subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל ρ. ז"א $x_n\xrightarrow{d}a \Rightarrow x_n\xrightarrow{\rho}a$

הוכחה: נגדיר את "פונקצית הזהות" $x \mapsto x \quad (X,d) \xrightarrow{id} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

$$\blacksquare$$

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

הסבר: נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $\quad d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $\quad (a < b)$ $\quad top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1: $\quad d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad f_n \xrightarrow{d_1} f$, $f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

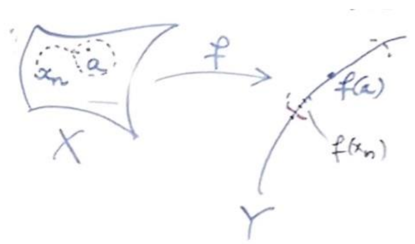
משפט (עיקרון ***Heine*****):** נניח $(Y,\rho),(X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

הוכחה:



(1) ⇐ (2):

נתון ש - $x_n \overset{d}{\rightarrow} a$. צ"ל - $f(x_n) \overset{\rho}{\rightarrow} f(a)$.

f רציפה ⇐ f רציפה בנקודה $a \in X$.

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$ (הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב- ϵ -סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \overset{\rho}{\rightarrow} f(a)$.

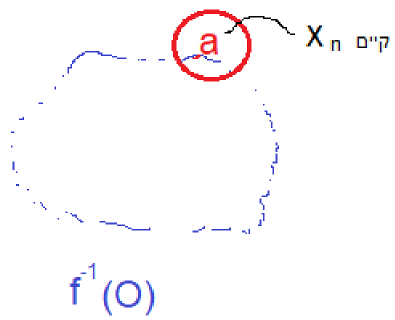
(2) ⇐ (3):

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho) : f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב - (X, d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" – $\exists a \in f^{-1}(O) : \forall \epsilon > 0\ \ B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon \coloneqq \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \dfrac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a,x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

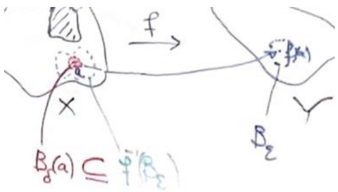
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon\big(f(a)\big) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon\big(f(a)\big)$.

לכן $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

<u>$(3) \Leftarrow (1)$:</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon\big(f(a)\big) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $\qquad f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(B_\epsilon\big(f(a)\big)\Big) \in top(d) \qquad$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq f\big(f^{-1}(O)\big) \subseteq O = B_\epsilon\big(f(a)\big)$$

☺

<u>הערה:</u> במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר</u>: $\quad f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.