תרגילים על משטחים:

אדום – חומר שלא יהיה במבחן, מסתבר, אבל אני לא מוחק את זה אחרי כל העבודה.

1. משטחי סיבוב.
חקרו את משטחי הסיבוב הבאים:
א. ספירה: $\gamma(t) = (a\sin t, 0, a\cos t)$, $0 < t < \pi$

$$g = f' = -g'' = a\cos t\,,\ f = -g' = -f'' = a\sin t$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים בנוסחאות של משטחי הסיבוב

$$G = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 sin^2\phi \end{pmatrix}, L = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 sin^2\phi \end{pmatrix}, S = -LG^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = k_2 = 1\,, K = k_1k_2 = 1\,, H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 1$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0\,, \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\,, \Gamma_{22}^1 = \sin\phi \cdot \cos\phi$$

זו לא מסילה סגורה.

ב. היפרבולואיד חד יריעתי: $\gamma(t) = \left(\sqrt{t^2 + r}, 0, t\right)$, $-\infty < t < \infty$

$$g = t\,, g' = 1\,, g'' = 0\,, f = \sqrt{t^2 + r}\,, f' = \frac{t}{\sqrt{t^2 + r}}\,, f'' = \frac{r}{\sqrt{t^2 + r}^3}$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים של משטחי הסיבוב

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2\phi^2 + r}{\phi^2 + r} & 0 \\ 0 & \phi^2 + r \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} \frac{-r}{(\phi^2 + r)\sqrt{2\phi^2 + r}} & 0 \\ 0 & \frac{\phi^2 + r}{\sqrt{2\phi^2 + r}} \end{pmatrix}$$

$$S = -LG^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2\phi^2 + r}} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{r}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3}\,, k_2 = \frac{-1}{\sqrt{2\phi^2 + r}}\,, K = k_1k_2 = \frac{-r}{(2\phi^2 + r)^2}\,, H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-\phi^2}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0\,, \Gamma_{11}^1 = \frac{rt(\phi^2 + r)}{(2\phi^2 + r)^{2^3}}\,, \Gamma_{12}^2 = \frac{\phi}{\phi^2 + r}\,, \Gamma_{22}^1 = \frac{\phi(\phi^2 + r)}{2\phi^2 + r}$$

ג. טורוס 8 - $\gamma(t) = (\sin t + 2, 0, \sin t\cos t)$

$$g = \sin t\cos t\ , g' = \cos^2 t - \sin^2 t\ , g'' = -4\sin t\cos t$$

$$f=\sin t+2\,,f'=\cos t\,,f''=-\sin t$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים של משטחי הסיבוב

$$G=\begin{pmatrix}\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi & 0\\ 0 & \sin^2\phi+4\sin\phi+4\end{pmatrix}$$

$$,L=\frac{1}{\sqrt{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi}}\begin{pmatrix}-3\sin\phi\cos^2\phi\ -\sin^3\phi & 0\\ 0 & \dfrac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{\sin\phi+2}\end{pmatrix}$$

$$,S=-LG^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi}}\begin{pmatrix}\dfrac{3\sin\phi\cos^2\phi\ \sin^3\phi}{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi} & 0\\ 0 & \dfrac{\sin^2\phi-\cos^2\phi}{(\sin\phi+2)^3}\end{pmatrix}$$

2. יהי משטח סגור (חסום ובלי שפה) $S\subseteq\mathbb{R}^3$. הוכיח שיש נקודה על המשטח עם עקמומיות גאוס חיובית:

תהי $O\in\mathbb{R}^3$ נקודה במרחב, ותהי הפונקציה $d:S\to\mathbb{R}^3$ $d(p)=\|p-O\|$. היא כמובן רציפה. ניקח איזשהו נקודה $P\in S$ שהיא מקסימום ב- S של d (רקיים בגלל ש- S קומפקטי). נוכיח שב- P העקמומיות חיובית.

בשביל לפשט דברים, נזיז ולסובב את המרחב עד ש:

א. $P=(0,0,0)$.
ב. $O=(0,0,R)$ (כאשר R הוא המרחק בין O ל- P).

כעת, לפי משפט הפונק' הסתומה, יש ל- S פרמטריזציה מקומית, בסביבה של P, שהיא גרף $\mathrm{X}(u,v)=\big(u,v,f(u,v)\big)$ השל פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ עם $f(0,0)=(0,0,0)=P$. נשתמש בפיתוח טיילור ונרשום

$$f(u,v)=f(0,0)+f_u'(0,0)u+f_v'(0,0)v+f_{uu}''(0,0)u^2+2f_{uv}''(0,0)uv+f_{vv}''(0,0)v^2+g(u,v)$$

כאשר הנגזרות הראשונות והשנייות של g מתאפסות, מה ששקול ל-

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{g(u,v)}{u^2+v^2}=0$$

אנחנו יודעים ש- $f(0,0)=0$ בנוסף, בגלל שכל נקודהעל המשטח קרובה ל- $O=(0,0,R)$ מרחק של מקסימום R, הוא נמצא בתוך הכדור $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$. בפרט הוא מקיים $z\ge R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ולכן לכל $(u,v)\neq(0,0)$ $f(u,v)\ge R-\sqrt{R^2-u^2-v^2}>0$.

אילו $f_u'(0,0)\neq0$ או $f_v'(0,0)\neq0$ הייתה נקודה (u,v) קרובה ל- $(0,0)$ שבה $f(u,v)<0$ סתירה, ולכן $f(u,v)=f_{uu}''(0,0)u^2+2f_{uv}''(0,0)uv+f_{vv}''(0,0)v^2+g(u,v)$

בנוסף, מטריצה ההסיאן $H_f=\begin{pmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} \\ f''_{uv} & f''_{vv}\end{pmatrix}$ של f היא חיובית לחלוטין, ז"א שלכל $(u,v)\neq(0{,}0)$

$$\begin{pmatrix} u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} \\ f''_{uv} & f''_{vv}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}=f''_{uu}(0{,}0)u^2+2f''_{uv}(0{,}0)uv+f''_{vv}(0{,}0)v^2>0$$

אחרת הייתה נקודה (u,v) קרובה ל- $(0{,}0)$ שבה $f(u,v)\le 0$ סתירה.

בפרט $\det H_f>0$. ולפי הנוסחאות של גרף פונקציה $K=\frac{\det H_f}{\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)^2}=\det H_f$.

3. שאלה על נוסחאות

א. בטא את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.

כמו שאתם אמורים לזכור, הנוסחה היא $\Gamma_{ij}^m=\frac{1}{2}\left(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\right)g^{km}$. אם נכפיל את הביטוי מימין ב- $2g_{ml}$ וקבל נוסחא שקולה (ופשוטה יותר, כי אין בה מטריצות הפוכות).

$$2\Gamma_{ij}^m g_{ml}=\left(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\right)g^{km}g_{ml}=\left(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\right)\delta_l^k=g_{il:j}+g_{jl:i}-g_{ij:l}$$

אז נוכיח את זה.

לפי ההגדרה

$$g_{ij:l}=\frac{\partial}{\partial u^l}\langle \mathrm{X}_i',\mathrm{X}_j'\rangle=\langle\frac{\partial}{\partial u^l}\mathrm{X}_i',\mathrm{X}_j'\rangle+\langle \mathrm{X}_i',\frac{\partial}{\partial u^l}\mathrm{X}_j'\rangle=\langle \mathrm{X}_{il}'',\mathrm{X}_j'\rangle+\langle \mathrm{X}_i',\mathrm{X}_{jl}''\rangle$$

אם ככה יוצא ש (כל הזוגות באותו צבע הם אותו ביטוי)

$$\begin{aligned} g_{il:j}+g_{jl:i}-g_{ij:l}&=\langle \mathrm{X}_{ij}'',\mathrm{X}_l'\rangle+\langle \mathrm{X}_i',\mathrm{X}_{lj}''\rangle+\langle \mathrm{X}_{ji}'',\mathrm{X}_l'\rangle+\langle \mathrm{X}_j',\mathrm{X}_{li}''\rangle-\langle \mathrm{X}_{il}'',\mathrm{X}_j'\rangle-\langle \mathrm{X}_i',\mathrm{X}_{jl}''\rangle \\ &=2\langle \mathrm{X}_{ij}'',\mathrm{X}_l'\rangle\end{aligned}$$

לפי הגדרת Γ_{ij}^k ו- L_{ij} זה שווה ל-

$$2\langle\Gamma_{ij}^m\mathrm{X}_m'+L_{ij}N,\mathrm{X}_l'\rangle=2\Gamma_{ij}^m\langle \mathrm{X}_m',\mathrm{X}_l'\rangle+2L_{ij}\langle N,\mathrm{X}_l'\rangle$$

לפי הגדרת התבנית היסודית הראשונה $g_{ml}=\langle \mathrm{X}_m',\mathrm{X}_l'\rangle$, ולפי הגדרת הנורמל $\langle N.\mathrm{X}_l'\rangle=0$. וסיימנו.

ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{ij}^k\mathrm{X}_k'+L_{ij}N\right)$ הוא סימטרי ביחס ל- j ו- k.

לפי הגדרת Γ_{ij}^k ו- L_{ij} מתקיים ש- $\mathrm{X}_{ij}''=\Gamma_{ij}^k\mathrm{X}_k'+L_{ij}N$. הביטוי שלנו הוא, אם כן, רק $\frac{\partial}{\partial u^m}\mathrm{X}_{ij}''=\mathrm{X}_{ijm}'''$. ניתן להחליף את סדר הגזירה כמו בכל פונק' חלקה.

ג. מצא את היחס בין L_{ij} לבין L_l^k.

צריך לזכור את הנוסחא $S=-LG^{-1}$, מה ששקול ל- $L+SG=0$. ברמת האיברים של המטריצות זה אומר $L_{ij}+L_i^k g_{kj}=0$, אז זה מה שצריך להוכיח.

לפי ההגדרה $g_{kj}=\langle \mathrm{X}_k',\mathrm{X}_j'\rangle$ ואילו $N_i'=L_i^k\mathrm{X}_k'$ וזה ידוע ש- $L_{ij}=\langle N,\mathrm{X}_{ij}''\rangle$.

אם כך

$$L_{ij}+L_i^k g_{kj}=\langle N,\mathrm{X}_{ij}''\rangle+L_i^k\langle \mathrm{X}_k',\mathrm{X}_j'\rangle=\langle N,\mathrm{X}_{ij}''\rangle+\langle L_i^k\mathrm{X}_k',\mathrm{X}_j'\rangle=\langle N,\mathrm{X}_{ij}''\rangle+\langle N_i',\mathrm{X}_j'\rangle$$
$$=\frac{\partial}{\partial u^i}\langle N,\mathrm{X}_j'\rangle=\frac{\partial}{\partial u^i}0=0$$

השיווין השניים-לפני-אחרון הוא כלל ליבניץ המורחב לנגזרת של מכפלה פנימית. עברתי אליו אתכם בכיתה. השיוויון הלפני אחרון הוא תכונה ידוע של הנורמל – N מאונך לכל X_j'.

ד. הוכח שהביטוי $L_{i[j}L_{l]}^k$ הוא פנימי (הבא אותו במונחים של מקמי המטריקה, מקדמי כריסטופל, ו/או נגזרותיהם).

$$L_{i[j}L_{l]}^k=\frac{1}{2}\left(L_{ij}L_l^k-L_{il}L_j^k\right)$$

הוא ביטוי שיופיע בנגזרת השלישית של X, בנגזרת שנייה יש $L_{ij}N$ ו- L_l^k מגיע מהנגזרת של N.

$$\mathrm{X}_{ijk}'''=\frac{\partial}{\partial u^k}\mathrm{X}_{ij}''=\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^m\mathrm{X}_m'+L_{ij}N\right)=\Gamma_{ij:k}^m\mathrm{X}_m'+\Gamma_{ij}^m\mathrm{X}_{mk}''+L_{ij:k}N+L_{ij}N_k'$$
$$=\Gamma_{ij:k}^l\mathrm{X}_l'+\Gamma_{ij}^m\left(\Gamma_{mk}^l\mathrm{X}_l'+L_{mk}N\right)+L_{ij:k}N+L_{ij}L_k^l\mathrm{X}_l'$$
$$=\Gamma_{ij:k}^l\mathrm{X}_l'+\Gamma_{ij}^m\Gamma_{km}^l\mathrm{X}_l'+\Gamma_{ij}^m L_{km}N+L_{ij:k}N+L_{ij}L_k^l\mathrm{X}_l'$$
$$=\left(\Gamma_{ij:k}^l+\Gamma_{ij}^m\Gamma_{mk}^l+L_{ij}L_k^l\right)\mathrm{X}_l'+\left(\Gamma_{ij}^m L_{mk}+L_{ij:k}\right)N$$

כזכור, כמו ב-ב', $\mathrm{X}_{ijk}'''=\mathrm{X}_{ikj}'''$ ולכן $\mathrm{X}_{i[jk]}'''=\frac{1}{2}\left(\mathrm{X}_{ijk}'''-\mathrm{X}_{ikj}'''\right)=0$. אלפי החישוב הקודם:

$$0=\mathrm{X}_{i[jk]}'''=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij:k}^l-\Gamma_{ik:j}^l+\Gamma_{ij}^m\Gamma_{km}^l-\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l+L_{ij}L_k^l-L_{ik}L_j^l\right)\mathrm{X}_l'$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^m L_{km}-\Gamma_{ik}^m L_{jm}+L_{ij:k}-L_{ik:j}\right)N$$
$$=\left(\Gamma_{i[j:k]}^l+\Gamma_{i[j}^m\Gamma_{k]m}^l+L_{i[j}L_{k]}^l\right)\mathrm{X}_l'+\left(\Gamma_{i[j}^m L_{k]m}L_{i[j:k]}\right)N$$

ובגלל ש- $\mathrm{X}_1',\mathrm{X}_2',N$ בסיס, כל המקדמים בצירוף הליניארי הזה שווים 0. בפרט $\Gamma_{i[j:k]}^l+\Gamma_{i[j}^m\Gamma_{k]m}^l+L_{i[j}L_{k]}^l=0$, מה שאומר ש- $L_{i[j}L_{k]}^l=-\Gamma_{i[j:k]}^l-\Gamma_{i[j}^m\Gamma_{k]m}^l$. וסיימנו.

ה. הוכיחו שעקמומיות גאוס שווה ל- $\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L_{2]}^2$.

נפשט: $-\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L_{2]}^2=-\frac{1}{g_{11}}\left(L_{11}L_2^2-L_{12}L_1^2\right)=\frac{1}{g_{11}}\left(L_{12}L_1^2-L_{11}L_2^2\right)=\frac{1}{g_{11}}\left(L_{21}L_1^2-L_{11}L_2^2\right)$

השיוויון האחרון הוא הסימטריה $L_{12}=L_{21}$.

כעת נשתמש בנוסחא $L=-SG$, שניבע כנוסחא של מקדמי המטריצה $L_{ij}=-L_i^k g_{kj}$.

$$-\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L_{2]}^2=\frac{1}{g_{11}}\left(L_{21}L_1^2-L_{11}L_2^2\right)=\frac{1}{g_{11}}\left(-L_2^k g_{k1}L_1^2+L_1^k g_{k1}L_2^2\right)$$
$$=\frac{1}{g_{11}}\left(L_1^1 g_{11}L_2^2+L_1^2 g_{21}L_2^2-L_2^1 g_{11}L_1^2-L_2^2 g_{21}L_1^2\right)$$
$$=\frac{1}{g_{11}}\left(L_1^1 g_{11}L_2^2-L_2^1 g_{11}L_1^2\right)=L_1^1L_2^2-L_2^1L_1^2=\det S=K$$

4. תהי עקומה $\beta = \mathrm{X} \circ \alpha$ על משטח בפרמטריזציה X. נניח שלכל t, הוקטור $\beta''(t)$ הוא פרופורציונלי לוקטור $\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'$. מצאו זוג משוואות דיפרנציאלית שמקויימות על ידי הרכיבים α^1, α^2 של α.

אלה המשוואות הגאודזיות $\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} = 0$, זה ש- $\beta''(t)$ פרופורציונלי ל- $\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'$, ולכן ל- $N = \frac{\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'}{\|\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'\|}$, זו אחת ההגדרות של עקומה גאודזית.

ניתן להוכיח את זה ישירות. לפי כלל השרשרת $\beta'(t) = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u^i}\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}(t) = \mathrm{X}_i'\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}$, הפעלה שנייה של נגזרת תיתן

$$\begin{aligned}
\beta''(t) &= \mathrm{X}_{ij}''\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} + \mathrm{X}_i'\big(\alpha(t)\big)\frac{d^2\alpha^i}{(dt)^2} \\
&= \Big(\Gamma_{ij}^k\big(\alpha(t)\big)\mathrm{X}_k'\big(\alpha(t)\big) + L_{ij}\big(\alpha(t)\big)N\Big)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} + \mathrm{X}_k'\big(\alpha(t)\big)\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} \\
&= \left(\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}\right)\mathrm{X}_k'\big(\alpha(t)\big) + L_{ij}\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}N\big(\alpha(t)\big)
\end{aligned}$$

עם $\beta''(t)$ פורופורציאני ל- N אז המקדמים האחרים, אילו של X_k', שווים 0. זה אומר $\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k\big(\alpha(t)\big)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} = 0$, וסיימנו.

5. תהי עקומה $\gamma(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ במהירות יחידה ($t_1 \le t \le t_2$) ויהי X משטח הסיבוב שלה.
   a. הביאו את שטח המשטח לפי הפונקציה f.

למשטח יש פרמ' $\mathrm{X}(\phi,\theta) = \big(f(\phi)\cos\theta, f(\phi)\sin\theta, g(\phi)\big)$, $t_1 \le \phi \le t_2$ ו- $0 \le \theta \le 2\pi$

התבנית היסודית הראשונה היא, כמו שלמדנו (וקל לחשב עם לא זוכרים
$G = \begin{pmatrix} f'^2(\phi) + g'^2(\phi) & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix}$.

תבנית השטח היא, אם כן, $\sqrt{\det G}\, d\phi d\theta = f(\phi) d\phi d\theta$, ואנחנו מחפשים את השטח על כל הפרמטריזציה $\int_0^{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} f(\phi) d\phi\, d\theta = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f(\phi) d\phi$

   b. מצאו את השטח במקרה ש γ הוא מעגל ברדיוס β, שמרכזו מרוחק מרחק α מציר ה- z.

למדנו על פרמטריזציה במהירות יחידה למעגל שכזה, $\gamma(t) = \left(\beta\cos\frac{t}{\beta} + \alpha, 0, \beta\sin\frac{t}{\beta}\right)$, $0 \le \phi \le 2\beta\pi$. אם אתם לא זוכרים את זה קחו את הפרמ' $\gamma(t) = (\beta\cos t + \alpha, 0, \beta\sin t)$, $0 \le \phi \le 2\pi$ ותעברו למהירות יחדה בצורה הרגילה.

כעת לפי א' השטח הוא

$$2\pi \int_0^{2\beta\pi} \left(\beta\cos\frac{\phi}{\beta} + \alpha\right) d\phi = \left(\beta^2\sin\frac{\phi}{\beta} + \alpha\phi\right)\Big|_0^{2\beta\pi} = 2\alpha\beta\pi$$

6. תהי פרמטריזציה $X(u,v)$ של משטח.

a. הגדר את העקמומיות הראשיות k_1,k_2 של פרמטריזציה.

עלה הערכים העצמיים של המטריצה S, שמייצגת את העתקת ווינגרטן לפי הבסיס X_1', X_2'.

b. עם התבניות הראשונה והשנייה מקיימות $g_{12}\equiv L_{12}\equiv 0$, בחר בסיס מתאים והבא את העתקת ווינגרטן כמטריצה ריבועית.

נסמן $G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & 0\\ 0 & g_{22}\end{pmatrix}$ ו- $L=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12}\\ L_{12} & L_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{11} & 0\\ 0 & L_{22}\end{pmatrix}$, המטריצות המייצגות של התבנית היסודיות. אזי ידוע שבאותו בסיס כמו ב- א' שמתקיים $S=-LG^{-1}$.

$G^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{g_{22}}\end{pmatrix}$ ולכן $S=-LG^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{L_{11}}{g_{11}} & 0\\ 0 & -\frac{L_{22}}{g_{22}}\end{pmatrix}$.

c. בתנאים של ב', הבאה את הגודל $\frac{k_1}{k_2}$ לפי האיברים של התבניות הראשונה והשנייה.

הערכים העצמיים של S הזאת הם $k_1=-\frac{L_{11}}{g_{11}}$ ו- $k_2=-\frac{L_{22}}{g_{22}}$. אם כן $\frac{k_1}{k_2}=\frac{L_{11}g_{22}}{g_{11}L_{22}}$.

d. חשב את $\frac{k_1}{k_2}$ עבור משטח הסיבוב של העקומה $y=0, x=z^2+\frac{1}{4}$.

ניקח פרמ' לעקומה $\gamma(t)=\left(t^2+\frac{1}{4},0,t\right)$. משטח הסיבוב הוא $X(\phi,\theta)=\left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta, \phi\right)$.

פה $f(\phi)=\phi^2+\frac{1}{4}$, $f'(\phi)=2\phi$, $f''(\phi)=2$, $g(\phi)=\phi$, $g'(\phi)=1$ ו- $g''(\phi)=0$.

למדנו שלמשטחי סיבוב

$$G=\begin{pmatrix} f'^2(\phi)+g'^2(\phi) & 0\\ 0 & f^2(\phi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\phi^2+1 & 0\\ 0 & \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2\end{pmatrix}$$

ו-

$$L=\frac{1}{\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}}\begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi)-g'(\phi)f''(\phi) & 0\\ 0 & f(\phi)g'(\phi)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\phi^2+1}}\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & \phi^2+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

אם משהו לא זוכר את הנוסחאות, אפשר לחשב ישירות. זה לא ארוך.

ולכן

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{L_{11}g_{22}}{g_{11}L_{22}}=\frac{\frac{-2}{\sqrt{4\phi^2+1}}\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2}{(4\phi^2+1)\cdot\frac{\phi^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{4\phi^2+1}}}=\frac{-2\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2}{(4\phi^2+1)\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}=\frac{-2\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}{(4\phi^2+1)}$$
$$=\frac{-2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}{4\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$$

7. עבור פונקציה $f(x,y)=\frac{a}{y}$, ותהי המטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

a. מצא תחום מקסימאלי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.

התבנית היסודית הראשונה $G=\frac{a^2}{y^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ צריכה להיות חיובית לחלוטין (הע"ע צריכים להיות חיוביים) ולכן צריך $y>0$. אין שום בעיות אחרות, ולכן $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$.

b. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.

למדנו שעבור מטריקה קונפורמית $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$, אם $\mu=\ln f$, אז $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=-\Gamma_{22}^1=\mu_1'$ ו- $\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{11}^2=\mu_2'$.

במקרה שלנו $f=\frac{a}{y}$, $\mu=\ln\frac{a}{y}=\ln a-\ln y$, $\mu_1'=\mu_x'=0$ ו- $\mu_2'=\mu_y'=-\frac{1}{y}$ ולכן

$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{22}^1=0$, $\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=-\frac{1}{y}$ ו- $\Gamma_{11}^2=\frac{1}{y}$.

c. הגדרת את אופרטור לפלס בלטרמי למטריקה איזוטרמית.

זהו האופרטור $\Delta_{LB}(h)=\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial^2 h}{(\partial u^1)^2}+\frac{\partial^2 h}{(\partial u^2)^2}\right)$.

d. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי מקדמי קריסטופל

קודם נחשב $\Gamma_{11:2}^2=\left(\frac{1}{y}\right)_y'=-\frac{1}{y^2}$ ו- $\Gamma_{12:1}^2=0_x'=0$.

כעת, לפי הנוסחא

$$K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma_{1[1:2]}^2+\Gamma_{1[1}^i\Gamma_{2]i}^2\right)=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11:2}^2-\Gamma_{12:1}^2+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}-0+0\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)-\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)-0\cdot 0\right)$$
$$=\frac{y^2}{a^2}\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{a^2}$$

e. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי אופרטור לפלס בלטרמי.

במקרה שלנו אופרטור לפלס בלטרמי יהיה $\Delta_{LB}(h)=\frac{y^2}{a^2}\left(h_{xx}''+h_{yy}''\right)$. המשפט אומר ש-

$$K=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\ln f^2)=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}(2\ln f)=-\Delta_{LB}(\ln f)=-\Delta_{LB}(\mu)$$

במקרה שלנו $\mu=\ln a-\ln y$, $\mu'_x=\mu''_{xx}=0$, $\mu'_y=-\frac{1}{y}$, $\mu''_{yy}=\frac{1}{y^2}$ ו-

$$K=-\Delta_{LB}(\mu)=-\frac{y^2}{a^2}\left(0+\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{a^2}$$

f. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

עבור עקומה $a(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ המשוואות הגאודזיות מקבלות את הצורה.:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\Gamma^1_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\Gamma^2_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0$$

במקרה שלנו,

$$\frac{d^2x}{(dt)^2}-\frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2}+\frac{1}{y}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)=0$$

8. עבור פונקציה $f(x,y)=\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^{-1}$, כאשר $\rho>0$ פרמטר, תהי המטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

a. מצא תחום מקסימאלי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.

שוב, התבנית היסודית הראשונה $G=\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^{-2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ צריכה להיות חיובית לחלוטין ולכן צריך $1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)>0$, אבל זה תמיד קורה. לכן $U=\mathbb{R}^2$ יהיה התחום המקסימלי.

b. חשב את מקדמי כריסטופל Γ^k_{ij} של המטריקה.

שוב נגדיר $\mu=\ln f=-\ln\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)$, ולכן

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=-\Gamma^1_{22}=\mu'_1=-\frac{1}{1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)}\cdot\frac{\rho}{2}x=-\frac{\rho x}{2+\frac{\rho}{2}(x^2+y^2)}$$

ובדומה

$$\Gamma^2_{22}=\Gamma^1_{12}=-\Gamma^2_{11}=\mu'_2=-\frac{\rho y}{2+\frac{\rho}{2}(x^2+y^2)}$$

c. תנו ארבעה שיטות לחישוב של עקמומיות גאוס של משטח.

ישנן 5 נוסחאות, בסך הכל:

לפרמטריזציה של משטח ב- $\mathbb{R}^3$ יש את 3 הנוסחאות:

$$K = \det S = \frac{\det L}{\det G} = -\frac{2}{g_{11}} L_{1[1} L_{2]}^{2}$$

בכל מקרה, יש את הנוסחא מהמשפט המדהים של גאוס:

$$K = \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma^{2}_{1[1:2]} + \Gamma^{i}_{1[1} \Gamma^{2}_{2]i} \right)$$

ואם המטריקה קונפורמית (= הפרמטריזציה איזוטרמית) ניתן להשתמש בלפלס בלטרמיי:

$$K = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (\ln f^2)$$

d. הסבירו אילו מהשיטות יכולות לפעל פה.

בגלל שלא מדובר על משטח ב- $\mathbb{R}^3$, אלא על משטח מופשט, שיטות 1-3 לא פועלות פה.

שיטה 4 תמיד פועלת, ובגלל שזו מטריקה קונפורמית גם שיטה 5 פועלת פה.

e. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

במקרה שלנו

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{f^2}\left(h''_{xx} + h''_{yy}\right) = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2 \left(h''_{xx} + h''_{yy}\right)$$

כמו ב-7,

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\ln f^2) = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(2\ln f) = -\Delta_{LB}(\ln f) = -\Delta_{LB}(\mu)$$
$$= \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2 \left(\mu''_{xx} + \mu''_{yy}\right)$$

ופה

$$\mu = -\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)$$

ולכן:

$$\mu'_x = -\frac{\rho x}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)}$$

ו-

$$\mu''_{xx} = -\frac{\rho\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)\right) - \rho^2 x^2}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)\right)^2} = \frac{\frac{\rho^2}{2}(x^2-y^2) - 2\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)\right)^2}$$

ובדומה

$$\mu''_{yy} = \frac{\frac{\rho^2}{2}(y^2 - x^2) - 2\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\right)^2}$$

נציב:

$$K = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\mu''_{xx} + \mu''_{yy}\right) = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\frac{-4\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\right)^2}\right)$$

$$= -4\rho$$

f. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

כמו ב-7:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma_{22}^1\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma_{22}^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

ובמקרה שלנו,

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} - \frac{\rho}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)}\left(x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2y\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - x\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} - \frac{\rho}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)}\left(-y\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$