תרגיל 2 – בדידה קיץ

1. תהי קבוצה A , ויהי היחס $R \subseteq A \times A$. הוכח **שקיים** יחס שקילות **יחיד** T כך ש $R \subseteq T$ ולכל יחס שקילות אחר S כך ש $R \subseteq S$ מתקיים בהכרח $T \subseteq S$, (כלומר, T הינו יחס השקילות הקטן ביותר המכיל את R).

שים לב שלפי התרגיל ניתן להגדיר חלוקה של קבוצה לפי כל יחס על ידי מחלקת השקילות של יחס השקילויות הקטן ביותר המכיל אותו.

2.

a. נתונה הקבוצה $A=\{2,3\}$ ונתון היחס $R=\{(2,3)\}$, השלם את R להיות יחס טרנזיטיבי וסימטרי, האם היחס שקיבלת הינו יחס שקילויות?

b. השלם את הקבוצה הריקה ליחס שקילויות על $A=\{1,2,3\}$. מהו היחס שקיבלת? מהן מחלקות השקילות?

3.

a. כמה יחסים יש על הקבוצה A כאשר נתון $|A|=k$? (זכרו כי $|A|$ הוא מספר האיברים בקבוצה.)

b. כמה יחסי שקילות יש על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$?

c. * מצא נוסחא (רקורסיבית) לחישוב כמות יחסי השקילות על קבוצה מגודל k
רמז: מספר הדרכים לבחור קבוצה של k תלמידים מתוך כיתה של n תלמידים הינו:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הגדרה: יהיו יחסים $R \subseteq B \times C, S \subseteq A \times B$:

- ה**הרכבה** של R על S מוגדרת להיות היחס $R \circ S \subseteq A \times C$ כאשר
$$R \circ S=\{(a,c) \mid \exists b \in B:[(a,b) \in S] \wedge [(b,c) \in R]\}$$
(יש המסמנים הפוך $S \circ R$, אבל אנחנו לא כאלה)
- ה**הופכי** של R מוגדר להיות היחס $R^{-1} \subseteq C \times B$ כאשר $R^{-1}=\{(c,b) \mid (b,c) \in R\}$

4. הוכח כי $(R \circ S)^{-1}=S^{-1} \circ R^{-1}$

<u>שאלות מחשבה להמשך</u> (לא להגשה)

1. בהנתן יחס **כלשהו** (כלומר לאו דווקא יחסי 'גדול' או 'קטן' שאנו מכירים), כיצד הייתם מגדירים איבר מקסימלי או מינימלי?

2. נביט בקבוצת הגברים בעולם (הווה ועבר), וביחס "צאצא של" (כלומר אני צאצא של אבא שלי, אבא שלו, וכדומה). נגדיר שושלת של אנשים בתור סדרה של אנשים כך שהראשון הוא צאצא של השני, השני צאצא של השלישי וכדומה. נניח ולכל שרשרת כזו יש אב קדמון משותף (כלומר כולם צאצאים שלו). האם נובע שיש גבר שאינו צאצא של אף אחד?

(נניח ואין לעולם התחלה, ויש אינסוף אנשים אחורה בזמן).