פתרון תרגיל 4 בדידה

1. בכל סעיף נבדוק רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות.

(א)

i. רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{N}$ ל$-a$ יש את אותו מספר ספרות כמו לעצמו, כמובן, ולכן $(a,a) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a,b) \in R$. לכן, ל$-a$ ול$-b$ אותו מספר ספרות. לכן גם ל$-b$ ול$-a$ אותו מספר ספרות, ולכן $(b,a) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(1,2) \in R$ וגם $(2,1) \in R$ אך $2 \neq 1$ והיחס לא אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c) \in R$. לכן, ל$-a$ ול$-b$ אותו מספר ספרות, ול$-b$ ול$-c$ אותו מספר ספרות. לכן, ל$-a$ ול$-c$ אותו מספר ספרות, ולכן $(a,c) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן יחס שקילות.

בכל מחלקת שקילות יש את כל המספרים עם אותו מספר ספרות: קבוצת המספרים החד-ספרתיים, קבוצת המספרים הדו-ספרתיים וכן הלאה.

(ב)

i. רפלקסיביות: עבור $1 \in \mathbb{N}$, $1+1$ לא מתחלק ב-3 ולכן $(1,1) \notin R$ והיחס אינו רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a,b) \in R$. לכן $a+b$ מתחלק ב-3. לכן גם $b+a$ מתחלק ב-3. לכן $(b,a) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(1,2) \in R$ וגם $(2,1) \in R$ אך $2 \neq 1$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: $(1,2),(2,1) \in R$ אך $(1,1) \notin R$ ולכן היחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ג)

i. רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{N}$. כל מספר מחלק את עצמו ולכן $(a,a) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: $(1,2) \in R$ (כי 1 מחלק את 2) אך $(2,1) \notin R$ (כי 2 לא מחלק את 1) ולכן היחס אינו סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: יהיו $(a,b),(b,a) \in R$. מצד אחד a מחלק את b ולכן $a \leq b$ ומצד שני b מחלק את a ולכן $b \leq a$, ומכאן נקבל $a = b$ ולכן היחס אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c) \in R$. a מחלק את b ולכן קיים m טבעי עבורו: $b = am$. b מחלק את c ולכן קיים n טבעי עבורו: $c = bn$.
אם כן, $c = a \cdot mn$, כלומר c הוא כפולה של a ולכן a מחלק את c. לכן

$(a,c) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ד) i. רפלקסיביות: יהי $(X,Y) \in A$. מתקיים $X \cup Y = Y \cup X$ ולכן $((X,Y),(X,Y)) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $((X,Y),(Z,W)) \in R$. לכן $X \cup W = Y \cup Z$. לכן גם $Z \cup Y = W \cup X$, ולכן $((Z,W),(X,Y)) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $((\{1\},\{2\}),(\{1,2\},\{2\})) \in R$ וגם $((\{1,2\},\{2\}),(\{1\},\{2\})) \in R$ אך $(\{1,2\},\{2\}) \neq (\{1\},\{2\})$ והיחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: $((\{1,2\},\{2\}),(\{1\},\{1\})),((\{1\},\{1\}),(\{3\},\{3\})) \in R$, אך $((\{1,2\},\{2\}),(\{3\},\{3\})) \notin R$ והיחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

(ה) i. רפלקסיביות: יהי $a \in A$. $aa = a^2$ הוא ריבוע של מספר שלם (של a) ולכן $(a,a) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a,b) \in R$. לכן ab ריבוע של מספר שלם. לכן גם ba ריבוע של מספר שלם ולכן $(b,a) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(2,8),(8,2) \in R$ אך $2 \neq 8$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c) \in R$. לכן ab, bc הם ריבועים של מספרים שלמים. נרשום: $ab = n^2, bc = m^2$. נכפיל את המשוואות זו בזו ונקבל:

$$ab^2c = m^2n^2 \Longrightarrow ac = \left(\frac{mn}{b}\right)^2$$

$\frac{mn}{b}$ הוא מספר שלם (כי m הוא כפולה של b) ולכן גם ac הוא ריבוע של מספר שלם. לכן $(a,c) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מחלקות השקילות הן: $[n]_R = \left\{a | \exists c \in A | an = c^2\right\}$. כלומר, a נמצא במחלקת השקילות אם $a = \frac{c^2}{n}$ עבור c טבעי כלשהו. אם כן, אפשר לומר שבמחלקת השקילות של n נמצאים כל המספרים הריבועיים חלקי n, למשל: $[1]_R = \{1,4,9,16,\dots\}, [2]_R = \left\{\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\dots\right\}$ ובאופן כללי $[n]_R = \left\{\frac{1}{n},\frac{4}{n},\frac{9}{n},\frac{16}{n},\dots\right\}$.

(ו) i. רפלקסיביות: תהי $X \in A$. $X \Delta X = \emptyset$. בפרט $1 \notin X \Delta X$ ולכן $(X,X) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(X,Y) \in R$. לכן $1 \notin X \Delta Y$. מתקיים $X \Delta Y = Y \Delta X$ ולכן גם $1 \notin Y \Delta X$. לכן $(Y,X) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(\{2\},\{6\}),(\{6\},\{2\}) \in R$ אך $\{6\} \neq \{2\}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(X,Y),(Y,Z) \in R$. לכן $1 \notin X \Delta Y, Y \Delta Z$. מתקיים: $X \Delta Z \subseteq (X \Delta Y) \cup (Y \Delta Z)$ ולכן גם $1 \notin X \Delta Z$. לכן $(X,Z) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מהן מחלקות השקילות? אם $Y \in [X]_R$, $1 \notin X\Delta Y$.
מהגדרת הפרש סימטרי, אם $1 \in X$ אז $1 \in Y$ ואם $1 \notin X$ אז $1 \notin Y$.
כלומר, יש שתי מחלקות שקילות: הקבוצות המכילות את $\{1\}$ ואלו שלא.
אפשר להציג אותן כך:

$$[\{1\}]_R = \{Y \in A | 1 \in Y\}, [\emptyset]_R = \{Y \in A | 1 \notin A\}$$

(ז) i. רפלקסיביות: תהי $X \in A$. $X\Delta X = \emptyset$, ולכן $X\Delta X$ סופית, $(X, X) \in R$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(X, Y) \in R$. לכן $X\Delta Y$ סופית. . מתקיים $X\Delta Y = Y\Delta X$ ולכן גם $Y\Delta X$ סופית. לכן $(Y, X) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $R \in (\{6\}, \{2\}), (\{2\}, \{6\})$ אך $\{6\} \neq \{2\}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי.

iv. טרנזיטיביות: יהיו $(X, Y), (Y, Z) \in R$. לכן $X\Delta Y, Y\Delta Z$ סופיות. מתקיים: $X\Delta Z \subseteq (X\Delta Y) \cup (Y\Delta Z)$ ולכן גם $X\Delta Z$. סופית. לכן $(X, Z) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

היחס הוא יחס שקילות.

מהן מחלקות השקילות? אם $Y \in [X]_R$, $X\Delta Y$ סופית. מתקיים: $X\Delta Y = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)$. כלומר, מספר האיברים שנמצאים ב$-X$ אך לא ב$-Y$ הוא סופי, וכך גם מספר האיברים שנמצאים ב$-Y$ אך לא ב$-X$. אם כן, אפשר לומר שבמחלקת השקילות של X נמצאות כל הקבוצות ש"שונות מ$-X$" במספר סופי של איברים.

(ח) i. רפלקסיביות: $\{1\} \in A$ אך $\{1\} \Delta \{1\}$ לא אינסופית, ולכן $(\{1\}, \{1\}) \notin R$ והיחס אינו רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(X, Y) \in R$. לכן $X\Delta Y$ אינסופית. . מתקיים $X\Delta Y = Y\Delta X$ ולכן גם $Y\Delta X$ אינסופית. לכן $(Y, X) \in R$ והיחס סימטרי.

iii. אנטי-סימטריות: $(\mathbb{N}, 2\mathbb{N}), (2\mathbb{N}, \mathbb{N}) \in R$ אך $\mathbb{N} \neq 2\mathbb{N}$ ולכן היחס אינו אנטי-סימטרי (הקבוצה $2\mathbb{N}$ היא קבוצת כל המספרים הזוגיים).

iv. טרניזטיביות: $(\mathbb{N}, \emptyset), (\emptyset, \mathbb{N}) \in R$ אך $(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \notin R$ ולכן היחס אינו טרנזיטיבי.

היחס אינו יחס שקילות.

2. (א) נראה ששלוש התכונות מתקיימות. נשתמש בכך ש$-E_1, E_2$ מקיימים אותן.

i. רפלקסיביות: יהי $a \in A$. מכיוון שהיחסים E_1, E_2 רפלקסיביים, $(a, a) \in E_1, E_2$ ולכן גם $(a, a) \in E_1 \cap E_2$ והיחס רפלקסיבי.

ii. סימטריות: יהי $(a, b) \in E_1 \cap E_2$. לכן, $(a, b) \in E_1, E_2$. מכיוון שהיחסים E_1, E_2 סימטריים, גם $(b, a) \in E_1, E_2$. לכן $(b, a) \in E_1 \cap E_2$ והיחס סימטרי.

iii. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c)\in E_1\cap E_2$. לכן, $(a,b),(b,c)\in E_1,E_2$.
מכיוון שהיחסים E_1,E_2 טרנזיטיביים, גם $(a,c)\in E_1,E_2$. לכן $(a,c)\in E_1\cap E_2$ והיחס טרנזיטיבי.

לכן היחס $E_1\cap E_2$ הוא יחס שקילות.

(ב) נתבונן בקבוצה $A=\{1,2,3\}$ וביחסים:

$$E_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$

$$E_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$$

אלו אכן יחסי שקילות, אך $E_1\cup E_2$ אינו יחס שקילות מכיוון שאינו טרנזיטיבי; $(3,1),(1,2)\in E_1\cup E_2$ אך $(3,2)\notin E_1\cup E_2$.