פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 5

1. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ (ביחס לאופק) ונוטה בזוית θ. המהירות הזויתית של כדוה"א Ω.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת והראו כי הוא ניתן לכתיבה (עד כדי קבוע) בצורה

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 2\Omega \sin\lambda L + o(\Omega)$$

כאשר $\mathcal{L}_0$ לגראנג'יאן "רגיל" של מטוטלת בקורדינטות קרטזיות ו L התנע הזויתי

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת במערכת האינרציאלית ("הרגילה"), $\vec{v} = \vec{v}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $m\omega^2\ell^2 \cos\theta \approx m\omega^2\ell^2(1 - \frac{1}{2}\theta^2)$ כאשר $\omega^2 = g/\ell$. בנוסף הניחו ש $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$, כלומר הזניחו את התנועה בכוון $\hat{z}$. כמוכן הזניחו איברים $O(\Omega^2)$).

$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ x & y & z \end{vmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} z\cos\lambda - y\sin\lambda \\ x\sin\lambda \\ -x\cos\lambda \end{pmatrix}$ ולכן המהירות היא

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} + 2z\Omega\cos\lambda - 2y\Omega\sin\lambda \\ \dot{y} + 2x\Omega\sin\lambda \\ \dot{z} - 2x\Omega\cos\lambda \end{pmatrix}$$

אם נזניח את התנועה בכוון $\hat{z}$ ($\dot{z} \sim z \approx 0$) ונזרוק איברים $O(\Omega^2)$ נקבל (עד כדי קבוע) את הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left((\dot{x} - 2y\Omega\sin\lambda)^2 + (\dot{y} + 2x\Omega\sin\lambda)^2 + (-2x\Omega\cos\lambda)^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) =$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+2m\Omega\sin\lambda(x\dot{y}-y\dot{x})-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)+o(\Omega)=\mathcal{L}_0+2\Omega\sin\lambda L+o(\Omega)$$

כאשר $\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$ הלגראנג'יאן ה"רגיל" בקירוב תנודות קטנות ו $L=m(x\dot{y}-y\dot{x})$ התנע הזויתי.

(ב) כתבו את משוואות אוילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

נקבל

$$\begin{aligned}m\ddot{x}-2m\Omega\sin\lambda\dot{y}+m\omega^2x=0\\ m\ddot{y}+2m\Omega\sin\lambda\dot{x}+m\omega^2y=0\end{aligned}$$

כפי שקיבלנו בכתה.

(ג) הוכיחו כי התנע הזויתי אינו נשמר (רמז: שני לגראנג'יאנים $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ הנבדלים בקבוע, כלומר $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_1+const$, שומרים על משוואות התנועה)

נניח בשלילה כי L קבוע. לפי סעיף (א) שני הלגראנג'יאנים נבדלים (בסדר ראשון ב Ω) בביטוי מהצורה $L\times const$. אזי משוואות התנועה עבור הלגראנג'יאן ה"רגיל" $\mathcal{L}_0$ והלגראנג'יאן $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+const\times L$ המביא בחשבון את סבוב כדוה"א, זהות. על פי סעיף (ב) משוואות התנועה, כמובן, שונות ממשוואות התנועה ה"רגילות", ולכן ההנחה ש L קבוע אינה נכונה.

(ד) מצאו גודל נשמר באמצעות משפט נתר (רמז: סיבוב אינפיניטיסימלי $x\mapsto x+\epsilon y,\ y\mapsto y-\epsilon x$)

קל לראות כי הלגראנג'יאן נשמר (בסדר ראשון ב ϵ, כלומר $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+o(\epsilon)$) תחת סבוב אינפיניטיסימלי $x\mapsto x+\epsilon y,\ y\mapsto y-\epsilon x$ ולכן

$$Q=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}(-x)=m\dot{x}y-2my^2\Omega\sin\lambda-m\dot{y}x-2mx^2\Omega\sin\lambda=$$

$$L-2m\Omega\sin\lambda(x^2+y^2)=const$$

(ה) משוואת התנועה של התנע הזויתי נתונה ע"י $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{\tau}$ כאשר $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ מומנט הכח $\vec{F}$. מצאו את המומנט שמפעיל כח קוריוליס [1] (רמז: סעיף (ד))

[1] מכיוון שלמטוטלת רכיב מהירות סופי בכוון הרדיאלי, כח קוריוליס מפעיל מומנט $\vec{\tau}\neq 0$

מסעיף (ד) נקבל

$$L = 2m\Omega \sin\lambda(x^2 + y^2) + const$$

ולכן [2]

$$\frac{dL}{dt} = \tau = 4m\Omega \sin\lambda(x\dot{x} + y\dot{y})$$

2. הראו כי $x > 0$, $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}$, $r = 1, 2, 3....$ ו $\lambda > 0$, פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את $std(X)$.
(השתמשו בנוסחה $\int_0^\infty x^k e^{-ax}dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$).
ברור כי $f_X(x) \geq 0, \ \forall x > 0$ וכן

$$\int_0^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^r}{(r-1)!}\frac{(r-1)!}{\lambda^r} = 1.$$

$$\langle X \rangle = \int_0^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^r e^{-\lambda x}dx = \frac{r}{\lambda}.$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r+1}e^{-\lambda x}dx = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

ולכן

$$std(X) = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} = \sqrt{\frac{r(r+1) - r^2}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{r}}{\lambda}.$$

[2] מחישוב ישיר מקבלים $\tau_0 = 2m\Omega \sin\lambda(x\dot{x} + y\dot{y})$ כך שלמעשה משפט נתר נותן לנו את המומנט הפיזיקלי עד כדי כפל בקבוע

3. צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא ?

כדי להימצא 2 מטרים ימינה לאחר 10 קפיצות יש לקפוץ 6 מטרים ימינה ו 4 שמאלה. זהו תהליך של $n = 10$ נסיונות בלתי תלויים עם $k = 6$ "הצלחות" (קפיצות ימינה) בהסתברות $p = \frac{3}{4}$ ו $n - k = 4$ "כשלונות" (קפיצות שמאלה) בהסתברות $1 - p = \frac{1}{4}$, המפולג בינומית $X \sim B(n,p)$ עם הסתברות $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. אם כן

$$P(X = 6) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 6 \end{array} \right) \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \simeq 0.15.$$

4. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. נגדיר משתנה אקראי חדש $Y = 4X^2$. מצאו את צפיפות ההסתברות של Y, $h_Y(y)$

(הדרכה: התבוננו בפונקצית ההצטברות $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds$ והביעו באמצעותה את ההסתברות $P\left(-\frac{\sqrt{y}}{2} \le X \le \frac{\sqrt{y}}{2}\right)$)

נתבונן בפונקציית ההצטברות

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds.$$

אזי $F'_X(x) = f_X(x)$ ו

$$P(-\sqrt{y}/2 \le X \le \sqrt{y}/2) = F_X(\sqrt{y}/2) - F_X(-\sqrt{y}/2), \;\; y > 0$$

ולכן

$$h_Y(y) = F'_X(\sqrt{y}/2)\frac{d}{dy}(\sqrt{y}/2) - F'_X(-\sqrt{y}/2)\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}/2) =$$

$$= f_X(\sqrt{y}/2)\frac{d}{dy}(\sqrt{y}/2) - f_X(-\sqrt{y}/2)\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}/2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/8}\left(\frac{1}{4\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{8\pi y}}e^{-y/8},\ \ y > 0,$$

ובסך הכל

$$h_Y(y) = \begin{cases} 0 & ,y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi y}}e^{-y/8} & ,y > 0 \end{cases}$$