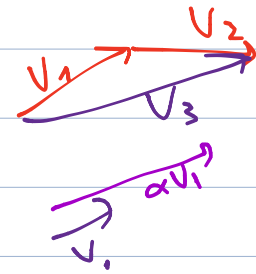
מרחבים וקטורים

וקטורים שאנחנו מכירים מהתיכון:

$V=\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$



חיבור: $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=$

כפל בסקלר: $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha(x,y,z)$

ההגדרה הפורמלית:

הגדרה: מרחב וקטורי הוא רביעיה $(V,\mathbb{F},+,\cdot)$, כאשר

- V היא קבוצה המוגדרת בה פעולה בינארית של **חיבור** $(+)$. כלומר $+:V\times V\to V$
- $\mathbb{F}$ הוא שדה. זכרו שבשדה גם מוגדרות פעולות חיבור וכפל, לא להתבלבל עם החיבור של V וכפל בסקלר.
- **כפל בסקלר** $(\cdot)$ היא פעולה המקשרת בין איברי V לאיברי $\mathbb{F}$. פורמאלית $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$

אקסיומות מרחב וקטורי:

1. **אקסיומות של החיבור ב** V: לכל $v,w,u\in V$ מתקיים
   1. מוגדרות: $v+w\in V$.
   2. קיבוץ: $v+(u+w)=(v+u)+w$.
   3. חילוף: $v+u=u+v$.
   4. איבר נטרלי: $\exists 0\in V:\ \forall v\in V:0+v=v$.
   5. איבר נגדי: $\forall v\in V\ \exists(-v)\in V:\ v+(-v)=0$.
2. **אקסיומות של כפל וחיבור של שדה:** בהגדרת שדה
3. **אקסיומות כפל בסקלאר:** לכל $v,u\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים
   1. מוגדרות $\alpha v\in V$
   2. קיבוץ: $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
   3. כפל ביחידה (של השדה): $1_{\mathbb{F}}\cdot v=v$
   4. פילוג:
      1. $\alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u$
      2. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

טרמינולוגיה: אומרים ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

איברי V נקראים **וקטורים**. איברי $\mathbb{F}$ נקראים **סקלארים**.

תכונות בסיסיות:

1. $(-1_F)v=(-v)$
2. $0_Fv=0_V$

דוגמאות:

1. $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$ $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ | $\alpha\vec{v}=(\alpha v_1,\dots,\alpha v_n)$
2. $\mathbb{F}^{m\times n}$ מעל $\mathbb{F}$, עם החיבור והכפל בסקלאר שהגדרנו למטריצות
3. $\mathbb{F}_n[x]$ (הפעולות המוכרות) $\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{F}\}$ מרחב הפולינומים מדרגה $\le n$ מעל $\mathbb{F}$
4. $\mathbb{F}[x]$ $\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid n\in\mathbb{N}\ \forall i\ a_i\in\mathbb{F}\}$ מרחב הפולינומים מכל דרגה
5. $V=\mathbb{R}$ (מעל איזה שדה?) (הפעולות המוכרות) מעל $\mathbb{Q}$, מעל $\mathbb{R}$ (כל שדה הוא מ״ו מעל עצמו)
6. $V=\mathbb{C}^3$, $\mathbb{F}=?$ יהיה מ״ו מעל $\mathbb{C}$, מעל $\mathbb{R}$, מעל $\mathbb{Q}$
7. האם $V=\mathbb{R}^3$ מ״ו מעל $\mathbb{F}=\mathbb{C}$? לא, ניקח סקלאר $\alpha=i$ $i\cdot(1,1,1)=(i,i,i)\notin\mathbb{R}^3$
8. $V=\mathbb{R}^2$ מ״ו מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ עם חיבור סטנדרטי, $\alpha(x,y)=(\alpha\cdot x,y)$?
9. $V=\mathbb{R}^2$ מ״ו מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ עם חיבור סטנדרטי, $\alpha(x,y)=(\alpha^2x,\alpha^2y)$

$2(1,1)+3(1,1)\rightarrow(4,4)+(9,9)=(13,13)$

$2(1,1)+3(1,1)=5(1,1)$ גם כאן פילוג לא מתקיים

$1\cdot(0,1)+1\cdot(0,1)\overset{\text{פילוג}}{=}(1+1)\cdot(0,1)\overset{\text{לפי החיבור}}{=}(0,1)$

$\Vert$

$(0,1)+(0,1)=(0,2)$ $\neq$ סתירה

תתי-מרחבים:

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. תת קבוצה $V\subseteq W$ יקרא **תת מרחב** אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות **V**. סימון $W\le V$

קריטריון מקוצר: כדי לבדוק אם $W\subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק:

1. איבר נטרלי: 0 של V נמצא ב-W;
2. סגירות לחיבור: לכל $w,u\in W$ מתקיים $u+w\in W$;
3. סגירות לכפל בסקלאר: לכל $w\in W,\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha w\in W$.

את שאר האקסיומות W יורש מ V בתת קבוצה.

הערה: ניתן לרכז את הבדיקות הנ"ל מספיק לבדוק

1. $W\neq\emptyset$
2. שלכל $\alpha\in\mathbb{F},\ w,u\in W$ מתקיים $\alpha u+w\in W$.

אבחנה: $V\subseteq V,\{0\}$ תמיד תתי מרחבים ונקראים תתי המרחבים הטריוויאלים.

דוגמאות ודוגמאות נגדיות:

1. עבור המישור האוקלידי $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$:

א. $W=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ (ציר ה x) הוא תת מרחב (קל לראות).

ב. $W=\{(x,y)\mid x,y\geq 0\}$ (הרביע החיובי) אינו תת מרחב כי
$-1(1,1)=(-1,-1)\notin W$

ג. $W=\{(x,y)\mid x,y\geq 0 \text{ or } x,y\leq 0\}$

(הרביע החיובי והשלילי) אינו תת מרחב כי W $\underset{\in W}{(2,4)}+\underset{\in W}{(-3,-3)}=(-1,1)\notin W$

ד. $W=\{(x,y)\mid y=3x\}$ קו ישר העובר בראשית הוא כן תת מרחב (לפי הסעיף הבא).

$u,w\in W$

$\vec{0}\in W$, $A(\alpha u+w)=$

$\alpha \underbrace{A\vec{u}}_{0}+\underbrace{A\vec{w}}_{0}=0$

2. תהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה ונסתכל על אוסף הפתרונות למערכת ההומוגנית $Ax=0$.
פורמאלית $W=\{v\in\mathbb{F}^n\ :\ Av=0\}\subseteq\mathbb{F}^n$. הוכחתם בהרצאה כי $W\leq\mathbb{F}^n$ הוא תת מרחב

3. מרחב המטריצות $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}$:

א. המטריצות מסוג $W=\{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & 0\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{F}\}$ הן תת מרחב.

נוכיח :

✓ $W\ni\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\end{pmatrix}$ ← $a=0_{\mathbb{F}}$

יהיו $A,B\in W$

$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbb{F}$

$\alpha A+B=\begin{pmatrix}\alpha a+b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W$

ב. המטריצות הסימטריות $W=\{A\in V\,|\,A^t=A\}$ והמטריצות האנטי-סימטריות $W=\{A\in V\,|\,A^t=-A\}$ שתיהן תתי מרחב.

סימטריות:

$\vec{0}\in W$ ✓

יהיו $A,B\in W$ צ״ל $\alpha A+B=(\alpha A+B)^t$

$$(\alpha A+B)^t=(\alpha A)^t+B^t=\alpha A^t+B^t=\alpha A+B$$

אכן תת-מרחב:

צ״ל לאנטי-סימטריות, A,B אנטי-סימטריות

$$(\alpha A+B)^t=\alpha A^t+B^t=-\alpha A-B=-1(\alpha A+B)\ \boxed{\checkmark}$$

אכן תת מרחב

ג.המטריצות הסימטריות איחוד עם המטריצות האנטי סימטריות

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-8\\8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-7\\9&0\end{pmatrix}\notin W=$ סימטריות $\cup$ א״ס

עליון / תחתון ✓

ד. המטריצות משולשיות/אלכסוניות/סקלאריות הן תת מרחב.

ה. המטריצות $W = \{A \in V \mid tr(A) = 0\}$ הן תת מרחב

הוכחה

$\vec{0} \in W$

יהיו $A, B \in W$

$tr(\alpha A + B) = \alpha\, tr(A) + tr(B) = \alpha 0 + 0 = 0$ ✓

4. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.

א. $W = \mathbb{R}_1[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ הינו תת מרחב כי באופן כללי $\mathbb{R}_n[x]$ הוא מרחב וקטורי (והפעולות מוגדרות באופן זהה לכל המרחבים).

ב. $W = \{a + bx \mid 0 \neq b \in \mathbb{R}\}$ הפולינומים מדרגה 1 בדיוק אינו תת מרחב. כי פולינום האפס שהוא האיבר הנטרלי ב V לא נמצא בW.

חיתוך תתי-מרחבים

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W_1, W_2 \leq V$ תתי מרחבים. אזי חיתוך תתי המרחבים $W_1 \cap W_2 := \{v \in V : v \in W_1 \wedge v \in W_2\}$ הינו תת מרחב.

הערה: זהו התת מרחב הכי "גדול" שמוכל ב W_1, W_2. כלומר, כל תת מרחב U המקיים כי $U \subseteq W_1, W_2$ יקיים כי $U \subseteq W_1 \cap W_2$.

דוגמא 1

1. יהי $V = \mathbb{R}^4$. נגדיר שני תת מרחבים

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \wedge -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

נמצא את $W_1 \cap W_2$

נמצא פתרון למערכת ההומוגנית הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$x_3 = t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

דוגמא 2

יהי $V = \mathbb{R}^3$. נגדיר שני תת מרחבים

$$W_1 = \{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

נמצא את החיתוך ביניהם

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים בחיתוך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{מדרגים}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\alpha_1 + \alpha_4 = 0$

$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$

$\boxed{\alpha_3 + \alpha_4 = 0}$

$\alpha_3 = -\alpha_4$

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

דוגמא 3

$V = \mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$. יהיו W_1 תת מרחב של המטריצות הסימטריות ו W_2 תת המרחב של המטריצות האנטי סימטריות אזי: $W_1 \cap W_2 = \{A : A^t = A \wedge A^t = -A\} = \{0\}$

$A^t=A$ סימטרית $\wedge$ $A^t=-A$ אנטי סימטרית

$\downarrow$

$A=-A \Rightarrow 2A=0 \rightarrow A=0$

$W_1 \oplus W_2$

סכום תתי-מרחבים

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W_1, W_2 \leq V$ תתי מרחבים. נרצה למצוא את התת מרחב W הכי "קטן" שמכיל את W_1, W_2. "קטן" הכוונה כי כל תת מרחב U המקיים $W_1, W_2 \subseteq U$ בהכרח יקיים גם $W \subseteq U$.

<u>הערה</u>: W_1, W_2 מ"ו. $W_1 \cup W_2$ לאו בהכרח תת-מרחב.

סכום תתי-מרחבים, סכום ישר

הגדרה: V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W_1, W_2 \leq V$ תתי מרחבים. אזי **סכום תתי המרחבים** $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \,:\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ הינו תת מרחב.

תכונה: לכל תת מרחב U עבורו $W_1, W_2 \subseteq U$ מתקיים כי $W_1 + W_2 \subseteq U$.

הגדרה: הסכום $W_1 + W_2$ יקרא **סכום ישר** אם $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. סימון $W_1 \oplus W_2$.

דוגמאות

1. ב $V = \mathbb{R}^3$ נגדיר שני תת מרחב $W_1 = \{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \{\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \{\vec{0}\}$$

$$W_1 + W_2 = \left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_2\end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

2. באופן כללי V מרחבים וקטורי, $v_1, v_2, \dots v_m, v_{m+1}, \dots v_{m+k}$ וקטורים.

אם

$$W_1 = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \ : \ \forall i \ \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

$$W_2 = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_{m+i} \ : \ \forall i \ \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

$$W_1 + W_2 = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_{m+i}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{m+k} \alpha_i v_i\right\}$$

3. עבור

$$W_1 = \{(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{F}^n \ : a_1 = a_2 = \cdots = a_n\}$$

$$W_2 = \{(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{F}^n \ : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\}$$

מתקיים כי $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$

הוכחה:

$$w \in W_1 \wedge w \in W_2$$

$$(a, \dots a) : a \in \mathbb{F} \qquad n \cdot a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$w = \vec{0}$$

$$W_1 \oplus W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a_1 + k \\ \vdots \\ a_n + k \end{pmatrix} : k \in \mathbb{F}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}$$

תרגיל

במרחב $V=\mathbb{R}_2[x]$, הוכיחו כי $W_1 = \{p(x) \mid p(2)=0\}$ ו $W_2 = \{p(x) \mid p(x) = x \cdot p'(x)\}$ הם תתי מרחבים. חשבו את החיתוך והסכום שלהם. הראו שהסכום ישר.

$P = a+bx+cx^2$

$P' = b+2cx$

W_1 - פולינומים מדרגה 2 ומטה שיש להם שורש 2.

$a+bx+cx^2 = bx+2cx^2$

W_2 - פולינומים מדרגה 2 כש $a=c=0$

או מהצורה: $p(x)=bx$

$W_1 \cap W_2 \ni P$

$\exists b\in\mathbb{R} : P=bx \wedge b\cdot 2=0$

$\downarrow$

$b=0 \longrightarrow$ האיבר היחיד ב $W_1\cap W_2$ הינו פולינום האפס

$W_1 \oplus W_2 = \{P_1(x)+P_2(x) \mid P_1(2)=0,\ P_2(2)=2b\} =$

$\downarrow$

$P_2=bx : b\in\mathbb{R}$