בס"ד

מתמטיקה בדידה - היסודות התיאורטיים של מדעי המחשב

dmebiu@gmail.com

שימי

ספרים: יונתן לינארד - העברית

~~[illegible]~~ בר ושיר

- שוני ~~[illegible]~~ ואהרון -

תורת הקבוצות

קבוצה היא הדבר הבסיסי ביותר במתמטיקה - לא ניתנת להסברה.

קבוצה - בעלת איברים ובעלת שייכות

- סימון: $X \in A$ $\quad A=\{2,\text{אהבה},\text{כדורגל}\}$

- קבוצה יכולה להכיל קבוצות: $B=\{2,A,\{3,18\}\}$ $\quad 3 \notin B$

- $C=\{2,1,1,2,1,2,2\}=\{1,2\}$

- $D=\{x \underset{\text{כך ש-}}{|} p(x)\}=\{x\in U \mid p(x)\}$

$D=\{x \mid \text{לפ"א יש שורש שלם}\}$

שייך ל... - $\in$

לכל - $\forall$

כך ש... - $|$

קיים - $\exists$

פסוק: פסוק היא קביעה שיש לה ערך אמת כלומר, היא אמיתית (T)
או שקרית (F)

דוגמאות: "י-ם היא בירת ישראל" (T)

"$1+2=4$" (F)

"יש חיים מחוץ לכדה"א" - כן פסוק

קשרים: בעזרת הקשרים בונים פסוק מורכב מפסוקים ~~אטומיים~~ אחרים.

ערך האמת של פסוק מורכב נקבע ע"י ערך האמת של תתי-הפסוקים והקשר.

דוגמאות: קשר "וגם" מסומן $\wedge$ ערך האמת של $p\wedge q$ נקבע ע"י טבלת האמת:

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

"או" מסומן $\vee$

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

"שלילה" נסמן $\neg$ (קשר אונה)

p	$\neg p$
T	F
F	T

"גרירה" נסמן $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם "ירד גשם" (p) אז אני לא אגיע (q)

לכן, אני לא אעמוד בהתחייבות רק כאשר p חיובי וכן הגעתי (q שלילי)

"גרירה דו כיוונית" נסמן $\longleftrightarrow$

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

<u>דוגמה לפסוק מורכב:</u>

$$\varphi = (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$$

תמיד ראשון

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge q$	$r \wedge \neg q$	φ
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F

<u>דוגמה כמתים:</u>

לכל $\forall x \in U \overset{\text{מקיים}}{.} p(x)$

קיים $\exists x \in U . p(x)$

<u>שוויון קבוצות</u>

- קבוצה A שווה לקבוצה B אם ורק אם X הוא איבר של A אם ורק אם X הוא איבר של B

כלומר: $A = B \Longleftrightarrow \forall x \, [(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$

<u>הגדרה:</u> <u>הכלה</u> נאמר שקבוצה A <u>מוכלת</u> בקבוצה B או ש A היא <u>תת-קבוצה</u> של B אם ורק אם כל איבר של A הוא איבר של B.

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \, [(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

A ו-B קבוצות:

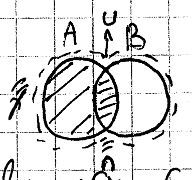
<u>איחוד:</u> $X\in A\cup X\in B \leftrightarrow X\in C \Longleftrightarrow C=A\cup B$ $A\cup B=\{x \mid x\in A\cup x\in B\}$ גם A וגם B

<u>חיתוך:</u> $A\cap B=\{x\mid x\in A\cap x\in B\}$ $C=A\cap B \Longleftrightarrow x\in C \leftrightarrow x\in A\cap x\in B$ החלק המשותף של הקבוצות

<u>חיסור:</u> $C=A\setminus B \Longleftrightarrow x\in C \leftrightarrow x\in A\cap x\notin B$ הוצאת האיברים שבשתי הקבוצות (נשארים רק עם הנותרים של A)

<u>דיאגרמת ון</u>

מייצגים קבוצה ע"י תחום סגור במישור.



בעזרת הדיאגרמה ניתן לייצג את כל הפעולות שכתבנו לעיל

* להראות שבעזרת 4 עיגולים לא ניתן לייצג את כל הפעולות במישור.

* במקום עיגולים - תחומים סגורים/צורות שונות ונראה שזה עובד.

<u>קבוצה ריקה</u> - הקב' הריקה, מסומנת $\emptyset$, היא הקבוצה הריקה (יש רק אחת כזו). $\leftarrow$ $\forall x.\ x\notin\emptyset$

גם, $\emptyset\neq\{\emptyset\}$

<u>תכונה:</u> לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\subseteq A$

* כאשר רוצים להוכיח משהו שנכון לכל קבוצה - נתחיל משפט ההוכחה ב"תהא".

<u>הוכחה:</u> תהא A קבוצה כלשהי!

<u>צ"ל:</u> $\forall x\ (x\in\emptyset \rightarrow x\in A)$

יהא x איבר כלשהו

<u>צ"ל:</u> $(x\in\emptyset)\rightarrow(x\in A)$ (הביטוי מהצורה $p\rightarrow q$, אם p שקר אז הביטוי כולו אמת.)

וידוא - לכן נכונה את ההוכחה שלנו לאורך הפסוק

- לקבוצה ריקה מתקיים $\forall x.\ x\notin\emptyset$ לכן, $x\in\emptyset$ ביטוי שקר, והוכחנו $x\in\emptyset\rightarrow x\in A$

<u>תכונות:</u> 1. טרנזיטיביות של הכלה: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\rightarrow A\subseteq C$

2. קומוטטיביות של חיתוך ואיחוד: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

3. אסוציאטיביות של חיתוך ואיחוד: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

4. אידמפוטנטיות $A\cap A=A$ $A\cup A=A$

5. פעולות עם קב' ריקה. $A\cup\emptyset=A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$

<u>איחודים וחיתוכים כלליים:</u> נתונה קבוצה I, נקרא לה קבוצת האינדקסים, ולכל $i\in I$ נתונה קבוצה A_i.

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_i \Longleftrightarrow \forall i\in I.\ x\in A_i$$

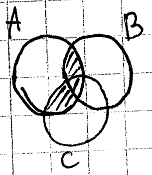
$$x\in\bigcup_{i\in I}A_i \Longleftrightarrow \exists i\in I.\ x\in A_i$$

<u>דוגמא:</u> $\bigcap_{x\in(0,1)}(0,x)$

נגדיר $A_x=(0,x)$

$\bigcap_{x\in(0,1)}A_x=\emptyset$ מכיוון שה מספר הכי גדול

הגדרה: יהיו A,B קבוצות. אם $A \cap B = \emptyset$ אומרים ש-A ו-B **זרות**



6. דיסטריבוטיביות.

$$*\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

דוגמא: נפשט את:

1 $A \cup (A \cap B) =$

2 $(.6) = (A \cup A) \cap (A \cup B) =$

3 $(.4) = A \cap (A \cup B) =$

4 $(5) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) =$

5 $(.6) = A \cup (\emptyset \cap B) =$

6 $= A \cup \emptyset =$ (5)

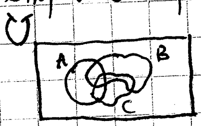
7 $= A$ (5)

הגדרה: קב' כל תתי-הקבוצות של קב' A נקראת **קבוצת החזקה** של A ומסומנת $P(A)$.

$P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ [כל תתי הקבוצות של p]

הגדרה: במקרים מסוימים ~~נגדיר~~ נדון בקבוצות שכולן תת קבוצות של קבוצה כלשהי. נסמנה ב- U (universal)

ונקרא לה הקבוצה האוניברסלית.



5/11/13 **יחסים**

~~הגדרה:~~ **סימון:** הזוג (a,b) נקרא **זוג סדור**

תכונה: $(a,b)=(c,d)$ $\Updownarrow$ $a=c \wedge b=d$

כלומר: $(a,b)\neq(b,a)$

יש טעם לדבר על (a,a)

ניתן להגדיר $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

* **צ"ל:** $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ $\Updownarrow$ $a=c \wedge b=d$

הוכחה: תרגיל.

דוגמא **להגדרה** שלא עובדת: $(a,b)=\{a,\{b\}\}$

$(\{c\},d)=\{\{c\},\{d\}\}=(\{d\},c)$ סתירה!

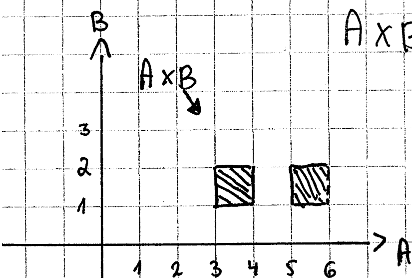
מכיוון שניתן להחליף את האיברים בקבוצה אך לא בזוג סדור

הגדרה: יהיו A,B קבוצות. **המכפלה הקרטזית** של A ו-B מסומנת $A\times B$

והיא הקבוצה: $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \wedge b\in B\}$

דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{$משה$,2\}$

$A\times B=\{(1,$משה$),(2,$משה$),(3,$משה$),(1,2),(2,2),(3,2)\}$



$A=[3,4]\cup[5,6)$

$B=[1,2]$

הערה: באופן כללי $A\times B\neq B\times A$

הערה: לכל A $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$

הגדרה: יחס בין קב' A לקב' B הוא תת קבוצה $A\times B$.

סימון: במקרה שכופלים קב' בעצמה מקובל לסמן $A^2=A\times A$

יחס מ-A ל-A נקרא יחס על A.

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$ - הקבוצה $\{(1,b)\}$ היא יחס, מ-A ל-B

גם כן יחס מ-A ל-B $\{(1,b),(3,a)\}$

יחס - גם נקרא תת קבוצה.

היחס המלא מ-A ל-B הוא $A\times B$

היחס הריק מ-A ל-B הוא $\emptyset$

הגדרה: יחס מעל קב' A נקרא **רפלקסיבי** אם לכל $a\in A$ הזוג (a,a) ביחס

סימון: אם $(a,b)\in R$ מסמנים aRb (R הוא יחס)

דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ היחס $\{(1,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ **רפלקסיבי**. כלומר, חייבים להיות כל הזוגות החוזרים על עצמם (a,a).

הגדרה: יחס מעל קב' A נקרא **סימטרי** אם $\forall a,b\in A.\ aRb\rightarrow bRa$

הגדרה: יחס מעל A נקרא **טרנזיטיבי** אם $\forall a,b,c\in A.\ (aRb\wedge bRc)\rightarrow(aRc)$

דוגמאות: תהא S קב' של קבוצות $A_1 \ldots A_n$. נגדיר: $R=\{(A_i,A_j)\mid A_i\subseteq A_j\}$

1. מכיוון ש-$A_i\subseteq A_j$ אז לא משנה איזה איבר נוני אקח מ-A_i יהיה אותו ב-A_j לכן הוא **רפלקסיבי**.

הגיוני שיהיו איברים ב-A_j שלא יהיו ב-A_i לכן הוא **לא סימטרי**. היא מוכל ב-A_j A_i לכן היא **טרנזיטיבית**.

הגדרה: יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי נקרא **יחס שקילות**

דוגמאות: - היחס **המלא** מעל A הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי לכן הוא יחס שקילות.

- היחס **הריק** הוא טרנזיטיבי, סימטרי, אך לא רפלקסיבי (באופן כללי)

כי אם יש איבר $a\in A$, אז חסר את (a,a) ביחס.

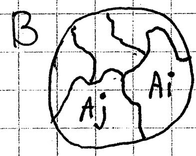
- R יחס מעל A.
האם R יחס שקילות?
כן

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$R=\{\underset{\text{ר}}{(1,1)},\underset{\text{ס}}{(1,3)},\underset{\text{ר}}{(2,2)},\underset{\text{ס}}{(3,1)},\underset{\text{ר}}{(3,3)},\underset{\text{ר}}{(4,4)}\}$$

[טרנזיטיביות: אם יש לי את $\overset{A\,B}{(1,3)}$ ואת $\overset{B\,C}{(3,1)}$ אז צריך שיהיה לי גם את $\overset{A\,C}{(1,1)}$]

חלוקה: תהא B קבוצה. אוסף של תתי קבוצות של B, A_i, נקרא **חלוקה**



אם: 1. $B=\bigcup A_i$

2. לכל $i\neq j$ $A_i\cap A_j=\emptyset$

הגדרה: יהא R יחס שקילות מעל קב' A. **מחלקת השקילות** של $a\in A$ היא הקבוצה:

$$[a]_R=\{b\in A \mid aRb\}$$

- אוסף מחלקות השקילות נקרא **קבוצת המנה** ומסומנת A/R

דוגמא: ב-R למעלה מחלקת השקילות הן: $[1]=\{1,3\}$, $[2]=\{2\}$, $[3]=\{1,3\}$, $[4]=\{4\}$

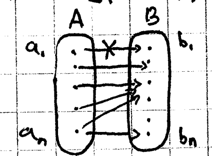
וקבוצת המנה היא: $A/R=\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$

פונקציות

הגדרה: יחס f מקבוצה A לקבוצה B נקרא **מלא** אם: $\forall a\in A.\exists b\in B.afb$

- היחס נקרא **חד ערכי** אם $\forall a\in A\ \forall b_1,b_2\in B\ [(afb_1)\wedge(afb_2)]\rightarrow(b_1=b_2)$

חד ערכי - אם לכל איבר ב-A יש לו רק נציג אחד ב-B



מלא וחד ערכי
ריק-לא חד ערכי
לא מלא

הגדרה: יחס f מ-A ל-B נקרא **פונקציה** מ-A ל-B אם היא **מלא** **וחד ערכי**

מונחים/סימונים: אם f פונ' מ-A ל-B **מסמנים:** $f: A\rightarrow B$

- הקב' A נקראת **התחום** של הפונקציה, B נקראת **הטווח** של הפונ'

מסמנים: $f(a)=b \iff afb \iff (a,b)\in f$

- אם $f(a)=b$ אומרים ש-a הוא **מקור** של b ו-b הוא **התמונה** של a.

הערה: המונחים 'מקור' ו'תמונה' מוגדרים גם לקב'. אם $f: A\rightarrow B$ ו $A'\subseteq A, B'\subseteq B$ אז

התמונה של A' היא הקבוצה $f(A')=\{b\in B\mid \exists a\in A'.f(a)=b\}$

המקור של B' הוא $\{a\in A\mid \exists b\in B'.f(a)=b\}$

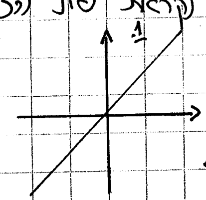
- קבוצת הפונקציות מ-A ל-B מסומנת B^A

דוגמה: $A=\{a,b\}$ $B=\{1,2\}$

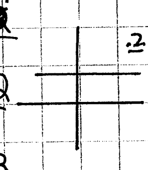
$$B^A=\{\{(a,1),(b,2)\},\{(a,1),(b,1)\},\{(a,2),(b,1)\},\{(a,2),(b,2)\}\}$$

- תהא $f: A\rightarrow B$, $D\subseteq A$ אז f **מצומצמת ל-D** היא הפונ': $f|_D=f\cap D\times B$

דוגמאות: 1. לכל קבוצה A נגדיר $i_A: A\rightarrow A$ ע"י $i_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$ i_A נקראת פונ' הזהות.

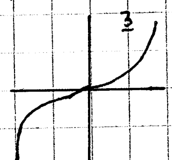


א1. הפונ' $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=x$ היא פונ' הזהות: $i_\mathbb{R}$



2. פונ' $f: A\rightarrow B$ נקראת **קבועה** אם בקבוצה $f(A)$ יש איבר אחד.

3. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ $f(x)=x^3$



$\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},x=y^2\}$ היא לא פונ' מהממשיים לעצמם.

- נב' ב $S|_{[0,\infty)}$, - קיבלנו יחס **מלא**, עדיין לא חד-ערכי.

- נחליף את S ב- $S'=\{(x,y)\mid x\in[0,\infty),y\in[0,\infty),x=y^2\}$ לכן S' היא פונ'.

הערה: פונ' f ו-g שוות אם הן שוות כקבוצות.

קל לוודא שמספיק לבדוק שיש להם אותו תחום ואותו כלל התאמה.

הגדרה: תהי $f:A\to B$ נאמר ש-f **חח"ע** אם: $\forall a_1,a_2\in A, \forall b\in B\ [f(a_1)=b \wedge f(a_2)=b]\to(a_1=a_2)$

נאמר שf **על** B אם: $\forall b\in B.\exists a\in A.\ f(a)=b$

הגדרה: אם A קב' סופית מסמנים ב-$|A|$ את מספר האיברים בA.

טענה: אם A ו-B קב' סופיות אז יש פונ' חח"ע ועל מ-A ל-B אמ"מ $|A|=|B|$

הרכבת פונקציות

הגדרה: יהיו $f:A\to B,\ g:B\to C$ פונ'. ההרכבה של g על f מסומנת $g\circ f:A\to C$ ומוגדרת ע"י: $\{(a,c)\mid a\in A, c\in C, c=g(f(a))\}$

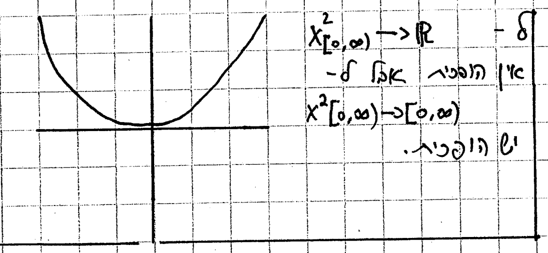
טענה: אם $f:A\to B$ אז $f\circ i_A = f = i_B\circ f$ באופן כללי $i_A\circ f$ לא מוגדר.

הגדרה: פונ' $f:A\to B$ נקראת **הפיכה** אם קיימת פונ' $g:B\to A$ כך ש-

$$g\circ f = i_A \quad \text{וגם} \quad f\circ g = i_B$$

במצב כזה g נקראת ההופכית של f ומסומנת $g=f^{-1}$

קל לוודא שאם g היא ההופכית של f אז f היא ההופכית של g (ובפרט גם g הפיכה).



משפט: $f:A\to B$ הפיכה אמ"מ f היא חח"ע ועל.

הוכחה: נניח ש-$f:A\to B$ חח"ע ועל.

נראה שקיימת g^* $g^*:B\to A$ כך ש- $f\circ g=i_B$

עבור $b\in B$ נוכל למצוא $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$

יש כזה כי f היא על.

נגדיר את $g(b)$ להיות איבר a כלשהו מ-A כך ש- $f(a)=b$

כעת $(f\circ g)(b)=f(g(b))=b$

19.11.13

תזכורת

טענה: $f: A\to B$ הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.

הוכחה: (נוכיח את 2 הכיוונים) $\Leftarrow$ נניח f הפיכה. כלומר יש $g: B\to A$ כך ש- $f\circ g = i_B \wedge g\circ f = i_A$.

- נראה ש-f על. כלומר צ"ל: $\forall b\in B. \exists a\in A. f(a)=b$

יהי $b\in B$ כלשהו. נבחר $a=g(b)$ ונראה $f(a)=b$

$$f(a)=f(g(b))=(f\circ g)(b)=i_B(b)=b$$

- נראה ש-f חח"ע. כלומר צ"ל: $\forall a_1,a_2\in A. (f(a_1)=f(a_2))\to a_1=a_2$

יהיו $a_1,a_2\in A$ כלשהם. נניח $f(a_1)=f(a_2)$, ונראה $a_1=a_2$

$$f(a_1)=f(a_2)$$
$$\Downarrow$$
$$a_1 = i_A(a_1) = (g\circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g\circ f)(a_2) = i_A(a_2) = a_2$$

$\Rightarrow$ נניח f חח"ע, נראה שיש $g: B\to A$ כך ש- $g\circ f = i_A$

מניחים: $\forall a_1,a_2\in A.(f(a_1)=f(a_2))\to a_1=a_2$ (חד-חד ערכיות)

נבנה פונ' $g: B\to A$

יהי $b\in B$, המקור של $\{b\}$ הוא יחידון* או קבוצה ריקה. (כי f חח"ע)

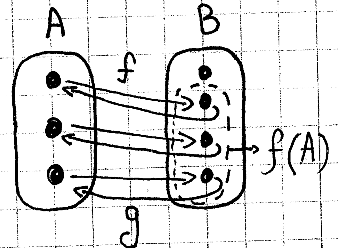
אם המקור היא קב' ריקה, לא נגדיר תמונה.

אם המקור הוא היחידון $\{a\}$, נגדיר: $g(b)=a$

קיבלנו: $g: f(A)\to A$

כעת עבור $a\in A$ כלשהו $g\circ f(a) = g(f(a)) = a$

*יחידון - קבוצה עם איבר אחד



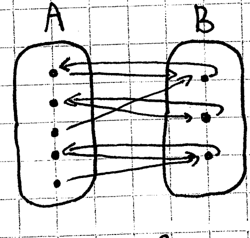
הערה: ניתן במקום לא להגדיר תמונה במקרה שהמקור של $\{b\}$ הוא $\emptyset$, להגדיר תמונה כלשהי (כלומר איבר כלשהו מ-A).

הגדרה: אם לפונ' $f:A\to B$ יש פונ' $g: B\to A$ כך ש- $g\circ f = i_A$ נאמר ש-f הפיכה משמאל.

$\leftarrow$ ראינו ש-f הפיכה משמאל אם היא חח"ע.

נניח f על. כלומר: $\forall b\in B . \exists a\in A . f(a)=b$

נגדיר: $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g=i_B$



* במקרה זה - $f\circ g=i_B$ מתקיים רק אם נתחיל מ-B.

בהינתן $b\in B$ כלשהו, נבחר (בתור $g(b)$) איבר כלשהו מהמקור של $\{b\}$.

נשים לב שהמקור אינו קב' ריקה!

כעת $(f\circ g)(b)=f(g(b))=b$

<u>הגדרה</u>: תהא $f:A\to B$. אם יש $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g=i_B$ אומרים ש-f הפיכה מימין.

← ראינו ש-f הפיכה מימין אם היא על.

<u>טענה</u>: אם f הפיכה מימין והפיכה משמאל אז היא הפיכה. (הוכחה קלה כתרגיל)

← הראנו חח"ע ⇐ הפיכות משמאל.

← הראנו על ⇐ הפיכות מימין. ■

<u>טענה</u>: היחס על קבוצות המוגדר ע"י $A\sim B$ אם יש $f:A\to B$ הפיכה, הוא יחס שקילות.

<u>הוכחה</u>: (צריך להוכיח קודם יחס שקילות לכן:) ← ~ רפלקסיבי: צ"ל: לכל A $A\sim A$ כלומר לכל A יש $f:A\to A$ הפיכה. פונ' הזהות היא פונ' הפיכה מ-A ל-A.

← ~ סימטרי. נניח $A\sim B$, כלומר יש $f:A\to B$ הפיכה. צ"ל: יש $g:B\to A$ הפיכה.

ניקח $g=f^{-1}$ וסיימנו.

← ~ טרנזיטיבי. כלומר נראה שאם $A\sim B \land B\sim C$ אז $A\sim C$.

<u>הוכחה</u>: נניח $A\sim B\land B\sim C$ כלומר יש $f:A\to B$ הפיכה ויש $g:B\to C$ הפיכה. נראה שיש $h:A\to C$ הפיכה.

נבחר ב- $h=g\circ f$. h הפיכה כי $f^{-1}\circ g^{-1}=h^{-1}$ היא ההופכית שלה.

$h\circ h^{-1}$

$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$

$g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1}$

$g\circ i_B\circ g^{-1}$

$g\circ g^{-1}$

i_C

26.1.13

תזכורת: 1. לפונ' $f:A\to B$ יש הופכית אמ"מ היא חח"ע ועל.

2. הגדרה: נאמר ש- $A\sim B$ אם יש פונ' הפיכה $f:A\to B$ $\sim$-טילדא

3. $\sim$ הוא יחס שקילות.

סימון: אם $A\sim B$ נסמן $|A|=|B|$

הגדרה: מחלקות השקילות של $\sim$ נקראות עוצמות. מסמנים את העוצמה של קבוצה A ב: $|A|$

- מושג העוצמה מכליל את מושג הכמות.
- קבוצות סופיות A, B מתקיים שיש פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ אמ"מ $|A|=|B|$ (מוכח ע"י אינדוקציה)

הגדרה: מסמנים את העוצמה של $\mathbb{N}$ ב- $\aleph_0$

דוגמא: $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_{even}|$ קב' הטבעיים הזוגיים $\mathbb{N}_{even}$

הוכחה: הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_{even}$

$f(n)=2n$ היא חח"ע ועל (כי $g:\mathbb{N}_{even}\to\mathbb{N}$, $g(k)=\frac{k}{2}$ היא ההופכית)

דוגמא: $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$

הוכחה: $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f((k,l))=2^{k-1}(2l-1)$ היא חח"ע ועל.

- לכל מספר טבעי יש פירוק יחיד למכפלת ראשונים.

הגדרה: קבוצה נקראת בת מניה אם היא שוות עוצמה לתת קבוצה של $\mathbb{N}$.

- קבוצה נקראת סופית אם היא שוות עוצמה לקב' $\{1,2...n\}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו.
- קבוצה שאינה סופית נקראת אינסופית.

(כל סופית היא בת מניה)

משפט: $|\mathbb{N}|\neq|(0,1]|$

הוכחה: ← נתעלם מפיתוחים עשרוניים השווים לאפס החל ממקום מסוים.

← נראה שאין פונ' על מ- $\mathbb{N}$ ל $(0,1]$

← נניח שיש. כלומר נניח ש- $f:\mathbb{N}\to(0,1]$ היא על. נרשום את f כך:

$\mathbb{N}$

1 $f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}....$

2 $f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}...$

3 $f(3)=0.a_{31}a_{32}a_{33}...$

⋮

← נגדיר פעולה על ספרות: d. ←

$0\to5$	$6\to1$
$1\to6$	$7\to2$
$2\to7$	$8\to3$
$3\to8$	$9\to4$
$4\to9$	
$5\to0$	

← נביט במספר: $x=0.d(a_{11})d(a_{22})d(a_{33})....$

← טענה- לx אין מקור. הוכחה לטענה: לכל $n\in\mathbb{N}$, n אינו המקור של x כי $f(n)$ ו-x שונות בספרה ה-n.

10.12.13

הגדרה: עוצמת הקטע $[0,1]$ נקראת **עוצמת הרצף** ומסומנת: $\aleph$

משפט (קנטור): לכל קבוצה C $\quad |C| \neq |P(C)| = |2^C|$

הוכחה: תהא $f: C \to P(C)$ נגדיר: $S = \{x \in C \mid x \notin f(x)\}$

נראה של-S אין מקור ב-f.

יהא $s \in C$ איבר כלשהו. ונניח $f(s) = S$. - אם $s \in S$, קיבלנו סתירה לכך שכן:

$s \in f(s) = S$, ולכן $s \notin S$ ↯

- אם $s \notin S$ אז $s \notin f(s) = S$

$\Downarrow$

$s \in S$ ↯

כלומר, ההנחה ש $f(s) = S$ אינה נכונה.

מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \dots$

סימון: נסמן: $|P(C)| = 2^{|C|}$ לא קשה לראות: $\aleph = 2^{\aleph_0}$

השערת הרצף: אין קבוצה S כך ש: $\aleph_0 < |S| < 2^{\aleph_0}$

כלומר אין קבוצה S כך ש: 1. אין פונ' על מ-$\mathbb{N}$ ל-S

וגם: 2. אין פונ' על מ-S ל-$[0,1]$

17.12.13

ראינו: • ניתן להרכיב פסוקים מורכבים מפסוקים אטומיים בעזרת **קשרים**.

דוגמא: נסמן p - "אתה פרנואיד"

c - "רודפים אחריך"

רשמו את הפסוק: "זה שאתה פרנואיד לא אומר שלא רודפים אחריך"

$$\neg(p \to (\neg c))$$

משתנה פסוקי הוא משתנה היכול לקבל ערך T או F. משתנה כזה מייצג פסוק בוליאני.

פסוק **בוליאני** מורכב ממשתנים פסוקיים ע"י קשרים.

דוגמא: $\varphi = \underbrace{(p \vee \neg q) \vee (p \wedge r)}_{\text{פסוק בוליאני}}$ $\quad p,q,r,\varphi$ - משתנים פסוקיים.

נאמר שפסוק היא בצורת CNF (conjunctive Normal Form) חיבור ע"י "וגם"

אם היא מהצורה $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$ כאשר $C_i = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{k_i}$

ו- A_i מייצג פסוק אטומי, או שלילתו.

ה-C_i-ים נקראים "פסוקיות" (clauses)

דוגמא: • $(A_1 \vee A_2)\wedge(A_1 \vee A_3 \vee A_4)$ - בצורת CNF

• $(A_1 \vee A_2)\wedge(A_1 \vee (A_2 \wedge A_3))$ לא CNF

• $A_1 \to A_2$ לא CNF

נאמר שפסוק הוא בצורת DNF (Disjunctive Normal Form)
אם היא מהצורה $D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_n$ כאשר $D_i = A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_{k_i}$
ה-D_i-ים נקראים גורמים (Terms)

משפט: כל פסוק ניתן להציג בצורת DNF ובצורת CNF.

הוכחה: נתון פסוק φ, נרשום אותו בצורת DNF.
נניח שהמשתנים הפסוקיים ב-φ הם $X_1,\dots,X_n$,
נרשום טבלת אמת:

X_1	X_2	X_3	...	X_n	φ
T	F	F	...	T	T
T					T
...					F
F					T
F					...
F					

2^n שורות

לכל שורה בטבלה עבורה φ מקבלת ערך אמת נרשום גורם מתאים
(אם $X_i = T$ בשורה, הוא יופיע בגורם X_i)
(אם $X_i = F$ בשורה, הוא יופיע בגורם $\neg X_i$)

$\varphi = (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \dots \wedge X_n) \vee$ → (זה בצורת DNF)

$(\quad\quad) \vee \dots$ DNF

• כדי לרשום φ בצורת CNF נבנה פסוק בצורת DNF ל-$\neg\varphi$ ונפעיל דה מורגן.

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

הגדרה: קבוצת קשרים נקראת שלמה אם ניתן לבנות כל פסוק מורכב ע"י שימוש רק בקשרים מהקבוצה.

מסקנה מהמשפט: הקבוצה $\{\neg, \wedge, \vee\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

דוגמא: $p \wedge q \iff \neg(\neg p \vee \neg q)$

לכן, $\{\neg, \vee\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

דוגמא: הקבוצה $\{\wedge,\vee\}$ אינה שלמה.

רעיון להוכחה: לא ניתן לבטא את $\neg p$.

$$p\vee p \iff p \iff p\wedge p$$

← יש קבוצות קשרים שלמות בגודל 1.

24.12.

קומבינטוריקה

עקרון הכפל: אם ניתן לתאר איברי קבוצה (סופית) בעזרת תהליך r שלבי, כך שבכל שלב בוחרים אחת מתוך k_i אפשרויות, אזי מספר האיברים בקבוצה הינו $k_1\cdot\ldots\cdot k_r$

הערה: חשוב רק מספר האפשרויות (לא חשוב שאלו אותן אפשרויות)

דוגמא: • מה גודל הקבוצה $S=\{(x,y) \mid \begin{smallmatrix} x \text{ אות אנגלית} \\ y \text{ ספרה}\end{smallmatrix}\}$

פתרון: יש 26 דרכים לבחור את x, ולאחר מכן 10 דרכים לבחור את y.

מעיקרון הכפל: $|S|=26\cdot10=260$

• בכמה דרכים ניתן לסדר n עצמים שונים בשורה?

$$n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot1=n!$$

הגדרה: מסמנים: $n!=n(n-1)\cdots1=\prod_{i=1}^{n} i$

$n!$ נקרא "n עצרת" מגדירים: $0!=1$

דוגמא: בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות A,B,C,D,E,F,G,H בשורה כך ש-G ו-H סמוכות.

פתרון: דרך I: נתייחס ל-G,H כ"בלוק". נסדר 7 עצמים בשורה ($7!$) נכפיל בסידור הבלוק ($2!$) סה"כ $7!\cdot2!$

דרך II: בכל שלב נוסיף עוד עצם נגלה מספר האפשרויות של השמת העצם הבא. אם שמתי עצם A, ל-B יש אפשרות להיות או לפניו או אחריו (2 אפשרויות). ול-C יש אפשרות להיות בין A ל-B, בקצה המספרים או בהתחלה (3 אפשרויות) וכך הלאה. אך G,H יש להם רק 2 אפשרויות

כלומר $1\cdot2\cdot\ldots\cdot7\cdot2=7!\cdot2!$

<u>בעיות ספירה</u>

נתונה הקבוצה $[n]=\{1,2,\dots,n\}$. • בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מהקבוצה $[n]$? <u>תלוי</u>

• בכמה דרכים ניתן להרכיב סדרות באורך k מאיברי $[n]$ (עם חזרות)? מעיקרון הכפל n^k

• אותו דבר, רק ללא חזרות? $\boxed{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}}$

• כמה תתי קבוצות בגודל k יש ל-$[n]$? $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

<u>נוכיח כך</u>: נסדר את n האיברים בשורה וניקח את k הראשונים

<u>הגדרה</u>: מסמנים: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ קוראים: "n בחר k"/"n מעל k".

האיברים $\binom{n}{k}$ נקראים "המקדמים הבינומיים".

• בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך n עם חזרות וללא חשיבות לסדר?

- יש התאמה חח"ע ועל בין הסדרות באורך $k+n-1$ המורכבות מ-k אפסים ו-$n-1$ אחדות, לבחירות של k איברים מתוך $[n]$ ללא סדר ועם חזרות.

$$\underset{1\ 2\ 3\ 4\ \dots}{000}|00\dots0|||\underset{n+k-1}{000}$$

צריך לספור סדרות כאלה.

מספר הסדרות הינו כמספר הדרכים לבחור k מקומות מתוך $k+n-1$ מקומות. כי בחירה של תת קבוצה בגודל k מקבוצת האינדקסים שגודלה $k+n-1$ לכן: $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \Longleftarrow \binom{k+n-1}{k}$

*סיכום: * מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך $[n]$

	עם חזרות	ללא חזרות
עם חשיבות לסדר	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

• בכמה דרכים ניתן לפזר k כדורים ב-n תאים?

- כדי לשחזר את השאלה נחליט האם הכדורים זהים או שונים והאם בכל תא יש מקום לכדור אחד לכל היותר או ללא מגבלה.

31/12/13

<u>דוגמה</u>: נתון מאגר כדורים אינסופי בשלושה צבעים R, G, B
בכמה דרכים ניתן להרכיב קבוצה בת 300 כדורים מהמאגר?

	כדורים שונים	זהים
כדור אחד לכל היותר בתא	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
ללא מגבלה	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$

<u>פתרון</u>: זה כמו לחלק 300 כדורים זהים לשלושה תאים שמסומנים R, G, B

לכן: $$\binom{3+300-1}{3-1}=\binom{302}{2}$$

$$=\frac{302!}{2!\,300!}=\frac{301\cdot 302}{2}$$

• כולל <u>לכל היותר</u> 300?

<u>פתרון</u>: $$\sum_{k=0}^{300}\binom{k+3-1}{3-1}=\binom{300+4-1}{4-1}$$

• זה כמו לחלק 300 כדורים זהים לארבעה תאים: R, G, B, לא בקבוצה.

<u>טענה</u>: $$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

<u>הוכחה</u>: • (<u>אלגברית</u>) $$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$$

• (<u>קומבינטורית</u>) - $\binom{n}{k}$ הוא מספר הדרכים לבחור תת קב' בגודל k מקבוצה בגודל n. בחירה של קב' בגודל k שקולה לבחירת המשלים.

<u>טענה</u>: $$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\,n!}=1$$

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$$

<u>טענה</u>: (<u>פסקל</u>) $$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

<u>הוכחה</u>: $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1+\frac{k}{n-k+1}\right)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{n-k+1}\right)$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$$

(קומבינטורית) בכמה דרכים ניתן לבחור תת קבוצה בגודל k מהקבוצה $\{1,2,3,\dots,n,n+1\}$?

- **אגף שמאל**: ברור!
- **אגף ימין**: יש שתי אפשרויות. או ש-1 נמצא בתת הקבוצה או שלא. (1) אם 1 בתת הקבוצה אפשר להשלים את הבחירה ע"י בחירה של $k-1$ איברים מ-$\{2 \dots n+1\}$ $\binom{n}{k-1}$
(2) אם 1 לא בתת הקבוצה אז נשלים ע"י בחירה של k איברים מ-$\{2 \dots n+1\}$ $\binom{n}{k}$

הסידור הבא נקרא __משולש פסקל__:

$$\binom{0}{0}1$$
$$\binom{1}{0}1 \quad \binom{1}{1}1$$
$$\binom{2}{0}1 \quad \binom{2}{1}2 \quad \binom{2}{2}1$$
$$\binom{3}{0}1 \quad \binom{3}{1}3 \quad \binom{3}{2}3 \quad \binom{3}{3}1$$

__נוסחת הבינום__: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

__הוכחה__: $$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)\cdots(a+b)}^{n \text{ פעמים}}$$
מספר הפעמים מהם יופיע המחובר $a^k b^{n-k}$ הוא מספר הדרכים לבחור k גורמים שיתרמו a מתוך n הגורמים.

__מסקנה__: עבור $n \in \mathbb{N}$ $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

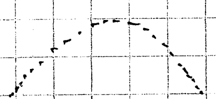
__הוכחה__: • אלגברית: $$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

• קומב': כמה תתי קבוצות יש ל-$[n]$?

__אגף שמאל__: הוא גודלה של $P([n])$ שראינו שהוא 2^n.
או ישירות, כל איבר ב-$[n]$ יכול להיות בתת הקבוצה או שלא.

__אגף ימין__: נבחר את גודל תת הקבוצה ונסמן ב-k ואז נבחר תת קבוצה בגודל k ב-$\binom{n}{k}$ דרכים.

__הגדרה__: סדרה a_i נקראת __אוני-מודלית__ אם קיים i כך שלכל
$$1 \le j < i \Rightarrow a_j \le a_{j+1}$$



ולכל $i \le j$ מתקיים $a_j \ge a_{j+1}$

__טענה__: לכל n הסדרה $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ היא אונימודלית.

__הוכחה__: תרגיל. (__רמז__: הביטוי ביחס $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$)