

## גיאומטריה אנליטית

ענף זה עוסק בחקר הגיאומטריה באמצעות כלים אלגבריים ובשימוש במערכת צירים.

### תרגיל

מצאו את הנקודה  $P$  על הפרבולה  $y = x^2$  הקרובה ביותר אל הנקודה  $(3, 0)$ .

### פתרון

נפתור בשתי דרכים:

**דרך א':** נקודה כללית על הפרבולה היא מהצורה  $Q = \left( \underbrace{t}_x, \underbrace{t^2}_y \right)$  עבור  $t \in \mathbb{R}$ . המרחק בין  $Q$  לבין  $(3, 0)$  הוא

$$d(Q, (3, 0)) = \sqrt{(t-3)^2 + (t^2)^2} \geq 0$$

ורוצים למזהר את זה. נעבוד עם המרחק בריבוע:

$$f(t) := d(Q, (3, 0))^2 = (t-3)^2 + (t^2)^2$$

$$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6 \stackrel{!}{=} 0$$

$t = 1$  פותר, ויוצא שהוא הפתרון הממשי היחיד. נוודא מינימום:

$$f''(t) = 12t^2 + 2 \quad f''(1) = 14 > 0 \quad \checkmark$$

הנקודה המבוקשת:

$$p \equiv Q|_{t=1} = (1, 1)$$

והמרחק המינימלי הוא

$$d(P, (3, 0)) = \sqrt{5}$$

**דרך ב':** שיפוע הישר המחבר בין  $(3, 0)$  לבין נקודה כללית  $Q = (t, t^2)$  על הפרבולה הוא

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t^2 - 0}{t - 3}$$

שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה כללית  $Q$  הוא

$$m_2 = y'|_{x=t} = 2x|_{x=t} = 2t$$

נדרוש שמכפלת השיפועים היא  $-1$ :

$$m_1 \cdot m_2 \stackrel{!}{=} -1$$

$$2t \cdot \frac{t^2}{t-3} = -1$$

$$2t^3 = -(t-3)$$

$$\boxed{2t^3 + t - 3 = 0}$$

קיבלנו אותה משוואה כבמו בדרך א' - ומכאן הפתרון זהה.

## עקומות ריבועיות

### הגדרה - עקומה ריבועית ב- $\mathbb{R}^2$

עקומה ריבועית ב- $\mathbb{R}^2$  היא אוסף של משוואות מהסוג

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

כאשר  $a, b, \dots, f \in \mathbb{R}$  קבועים.  
ניתן לרשום גם

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c = 0$$

### דוגמא

• מעגל:  $x^2 + y^2 = 1$

• פרבולה:  $y = x^2$

מקרים מנוונים:

• זוג ישרים מקבילים:  $y^2 - 1 = 0$

• כלום:  $x^2 + y^2 = -1$

• נקודה בודדת:  $x^2 + y^2 = 0$

## תרגיל

סווג והבא לצורה קנונית את העקומה הריבועית הבאה:

$$16x^2 - 32x + 25y^2 - 200y + 16 = 0$$

## פתרון

נעזר בהשלמה לריבוע:

$$6(x-1)^2 - 16 + 25(y-4)^2 - 400 + 16 = 0$$

$$6(x-1)^2 + 25(y-4)^2 = 400$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{4^2} = 1}$$

נחליף משתנים:  $\begin{matrix} x' = x-1 \\ y' = y-4 \end{matrix}$  לקבל:

$$\frac{(x')^2}{5^2} + \frac{(y')^2}{4^2} = +1$$

אליפסה עם מרכז בנקודה  $(1, 4)$  וחצאי הצירים באורכים 5, 4. למעשה, אפשר היה לדעת שזו אליפסה מהערכים העצמיים של  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 16, 25$$

$\det A > 0$  ולכן זו אליפסה.

## תרגיל

כנ"ל עבור

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 1 = 0$$

## פתרון

הפעם יש איבר מעורב  $xy$ , אותו אי אפשר להעיק עם השלמה לריבוע.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

ע"ע של A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 9 \implies \boxed{\lambda_{1,2} = -3, 2}$$

$\lambda_{1,2}$  בעלי סימנים הפוכים  $\Leftarrow$  היפרבולה.  
וקטורים עצמיים:

$$\lambda_1 = 2 \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -a + 2b = 0 \implies a = 2b \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}_1\| = |b| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |b| \sqrt{5}$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ניקח } b = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ לקבל}$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4a + 2b = 0 \quad b = -2a$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ D_1 & D_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

נגדיר משתנים חדשים  $x', y'$  ע"י

$$P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

המשוואה הייתה:

$$\vec{x}^T A \vec{x} + 1 = 0$$

$$(P\vec{x}')^T A (P\vec{x}') + 1 = 0$$

$$\vec{x}'^T \underbrace{P^T A P}_D \vec{x}' + 1 = 0$$

$$(x', y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 = 0$$

$$2(x')^2 - 3(y')^2 + 1 = 0$$

$$2(x')^2 - 3(y')^2 = -1$$

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -1$$

$$-\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = +1$$

ורואים שמדובר בהיפרבולה  
נחזור למשוואה המקורית:

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 1 = 0$$

נחלץ את  $y$ :

$$(-2)y^2 + (4x)y + (x^2 + 1) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 - 4(-2)(x^2 + 1)}}{-4} = \frac{-4x \pm \sqrt{24x^2 + 8}}{-4}$$

אם אנחנו מסתכלים רחוק מאוד ממקור ההיפרבולה,  $|x|$  מאוד מאוד גדול, ואז

$$y_{1,2} \approx \frac{-4x \pm \sqrt{24x^2}}{-4} = x \pm \frac{\sqrt{24} \cdot |x|}{-4} = x \pm \frac{2\sqrt{6}}{4}x \implies \begin{cases} y = \left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{4}\right)x \\ y = \left(1 - \frac{2\sqrt{6}}{4}\right)x \end{cases}$$

ואלו האסימפטוטות של ההיפרבולה.  
דרך אחרת למצוא אסימפטוטות היא לעבור לצורה קנונית, למצוא אסימפטוטות בקלות,  
ולחזור חזרה עם  $P^{-1}$ .

## תרגיל

רק לסווג הפעם:

$$x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$$

## פתרון

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_{1,2} = 0, 2$$

לכן זוהי משוואה של פרבולה.

## משטחים ריבועיים

הפעם יש גם  $z$ :

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + 2d \cdot xy + 2e \cdot xz + 2f \cdot yz + g \cdot x + h \cdot y + j \cdot z + k = 0$$

## תרגיל

סווג והבא לצורה קנונית:

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$$

## פתרון

$$(x - 1)^2 - 1 + 4y^2 + z^2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{(x - 1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$$

כל המקדמים חיוביים ובאגף ימין יש  $+1$  - לכן מדובר באליפסואיד. מרכזו בנקודה  $(1, 0, 0)$ .  
חצאי צירים באורכים  $1, \frac{1}{2}, 1$ .

## תרגיל

סווג:

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 12xy + 6xz + 5x - 6y - 32 = 2$$

## פתרון

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \lambda_{1,2,3} = 14, 5, 0$$

ולכן מדובר בפרבולואיד