תרגיל

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. האם קיים קטע בו f מונוטונית?

פתרון

התשובה היא - לא בהכרח! יש פונקציות רציפות שאינן מונוטוניות בשום קטע.

באינפי' בונים פונקציה רציפה f שאינה גזירה באף נקודה. ניקח את f להיות כזו.

אילו היה קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ שבו f מונוטונית, משפט הגזירה של לבג היה אומר כי f' קיימת כב"מ בI - וזו סתירה.

רציפות בהחלט

הגדרה

יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע. $f:I\to\mathbb{R}$ נקראת <u>רציפה בהחלט בI</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\left\{(a_k,b_k)\right\}_{k=1}^{n}$ אוסף של קטעים פתוחים וזרים שסכום אורכיהם קטן מδ אזי $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$ (תנאי טכני: $[a_k,b_k]\subseteq I$ (כלומר $a_k,b_k\in I$)).

מרחב כל הפונקציות הרציפות בהחלט בקטע I מסומן $\mathrm{AC}(I)$.[1]

תרגיל

תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ($f,g\in\mathrm{AC}([a,b])$), $c\in\mathbb{R}$ קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט ב$[a,b]$.

ב. $f+g\in\mathrm{AC}[a,b]$.

ג. $fg\in\mathrm{AC}[a,b]$.

פתרון

א. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f עם $\varepsilon\mapsto\frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי ישנו $\delta>0$ כך שאם $\left\{(a_k,b_k)\right\}_{k=1}^{n}$ אוסף של קטעים זרים עם $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k-a_k<\delta$ אזי $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{|c|}$. עבור אותו δ, אם $\left\{(a_k,b_k)\right\}_{k=1}^{n}$ אוסף קטעים זרים שסכום אורכם קטן מδ אזי

$$\sum_{k=1}^{n}\left|cf(b_k)-cf(a_k)\right|=|c|\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<|c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

הערה: ההוכחה עובדת רק עבור $c\neq0$. להוכיח עבור $c=0$ - תרגיל.

[1] AC בשביל Absolutely Continuous

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f ישנו $\delta_1 > 0$ כך שאם $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ אוסף קטעים זרים עם סכום אורכים קטן מδ_1 אזי

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

וע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של g ישנו $\delta_2 > 0$ כך שאם $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ אוסף קטעים זרים עם סכום אורכים קטן מδ_2 אזי

$$\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

עכשיו ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. אם $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ אוסף קטעים זרים שסכום אורכם קטן מδ(ולכן גם מ$\delta_{1,2}$) נקבל

$$\sum_{k=1}^{n} (f+g)(b_k) - (f+g)(a_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k) + g(b_k) - g(a_k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ג. f, g רציפות בקטע סגור ולכן <u>חסומות</u> שם(ישנו M כך שלכל $x \in [a,b]$ $|f(x)|, |g(x)| \leq M$). ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט(לשתי הפונקציות) ישנו $\min(\delta_1, \delta_2) = \delta > 0$ כך שאם $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ קטעים זרים שסכום אורכם קטן מδ אזי $\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$.

עבור אותו הδ:

$$\sum_{k=1}^{n} |(fg)(b_k) - (fg)(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)g(b_k) - f(b_k)g(a_k) + f(b_k)g(a_k) - f(a_k)g(a_k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)g(b_k) - f(b_k)g(a_k)| + \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)g(a_k) - f(a_k)g(a_k)| =$$

$$= |f(b_k)| \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| + |g(a_k)| \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq$$

$$\leq M \cdot \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| + M \cdot \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| <$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

הערה

סעיפים א'+ב' אומרים שהמרחב $\mathrm{AC}\left([a,b]\right)$ הוא מרחב לינארי/וקטורי - כלומר סגור לצירוף לינארי.

הגדרה

נאמר כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ אם אם ישנו קבוע L כך שלכל $x,y\in[a,b]$

$$|f(x)-f(y)|\le L\cdot|x-y|$$

תרגיל

א. הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ אז היא רציפה בהחלט.

ב. הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא ממחלקה C^1(=גזירה ברציפות) אזי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

הוכחה

א. ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$. אם $\left\{(a_k,b_k)\right\}_{k=1}^{n}$ זרים וסכום אורכם קטן מ$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\underset{\text{Lipschitz}}{\le}\sum_{k=1}^{n}L\cdot|b_k-a_k|=L\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$$

ב. מהנתון f' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן חסומה שם($|f'(x)|\le M$). יהיו $x,y\in[a,b]$. ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' קיימת ξ בין x לy כך ש

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)\cdot(x-y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\le M\cdot|x-y|$$

וזה תנאי ליפשיץ.

הערה

בעתיד נוכיח את ב' הרבה יותר בקלות)

שאלה ממבחן(תשע"א, שאלה 2)

א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב$\mathbb{R}$.

ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של החשבון האינטגרלי"(שני חלקים)

ג. תהי $\mathbb{R} \subseteq E$ קבוצה מדידה לבג ותהי I_E האינדיקטור של E. הוכיחו שלכמעט כל $a \in E$(ביחס למידת לבג)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E \, \mathrm{d}m = 1$$

פתרון(לסעיף ג)

ברור כי I_E אינטגרבילית בכל קטע סגור(כי $\int_a^b I_E \leq \int_a^b 1 = b-a < \infty$). נגדיר $F(x) = \int_a^x I_E \, \mathrm{d}m$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F גזירה כב"מ ו$F'(x) = I_E(x)$ כב"מ. ניתן לרשום את הגבול כך:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a-h)}{2h}$$

הגבול הזה נקרא הנגזרת הסימטרית של F בנקודה a, וידוע שאם F גזירה אזי הנגזרת הסימטרית קיימת ומתלכדת עם הנגזרת הרגילה כמעט לכל $a \in E$ $F'(a) = I_E(a) = 1$, וכמעט לכל $a \in E$ $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h)-F(a-h)}{2h} = F'(a)$, וכמעט לכל $a \in E$

$$\lim_{h\to 0^+} (\cdots) = F'(a) = I_E(a) = 1$$