אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 11

16 בינואר 2020

הגדרה: יהי X מרחב לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). נורמה מעל X היא פונקציה $\|\cdot\| : X \to \mathbb{F}$ המקיימת לכל $x, y \in X$ ו־$\alpha \in \mathbb{F}$:

1. אי־שליליות: $\|x\| \geq 0$, ויש שוויון אם ורק אם $x = 0$
2. הומוגניות: $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \|x\|$
3. אי־שוויון המשולש: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

מרחב לינארי עם נורמה נקרא מרחב נורמי.

דוגמה: $\mathbb{R}^d$ עם הנורמה האוקלידית $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2}$. על מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$ המסומן $C[a, b]$ אפשר להגדיר נורמה לפי $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

הגדרה: יהי X מרחב לינארי נורמי. נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת (בנורמה) ל־$x_0 \in X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$.

הערה: התכנסות בנורמה ב־$C[a, b]$ היא התכנסות במידה שווה.

הגדרה: סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n \geq N$ מתקיים $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. כל סדרה מתכנסת היא גם סדרת קושי, אבל ההיפך לא תמיד נכון.

הגדרה: מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא מרחב שלם. מרחב לינארי נורמי שלם נקרא מרחב בנך.

הגדרה: יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה חיובית. לכל $1 \leq p < \infty$ נגדיר $L^p(X) = \left\{f \mid \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\right\}$. זהו מרחב לינארי. נוכל להגדיר $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. לפי אי־שוויון מינקובסקי, $\left(L^p(X), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב נורמי.

משפט (אי־שוויון הלדר): יהיו $1 < p, q < \infty$ כך ש־$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. נניח כי $f \in L^p(X)$ וכן $g \in L^q(X)$. אז $fg \in L^1(X)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

משפט (אי־שוויון מינקובסקי): לכל $f,g\in L^{p}\left(X\right)$ מתקיים $\left\Vert f+g\right\Vert \leq\left\Vert f\right\Vert +\left\Vert g\right\Vert$.

תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}\to\left[a,b\right]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ וכן $\int_{a}^{b}f^{2}dm=1$. הוכיחו כי $\int_{a}^{b}xff'dm=1$ וגם $\left(\int_{a}^{b}\left(f'\right)^{2}dm\right)\left(\int_{a}^{b}x^{2}f^{2}dm\right)\geq\frac{1}{4}$.

פתרון: מתנאי הרציפות אפשר לחשב אינטגרל רימן. לפי אינטגרציה בחלקים

$$1=\int_{a}^{b}f^{2}dx=xf^{2}\left(x\right)|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}2xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx=2\int_{a}^{b}xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx$$

לכן $\int_{a}^{b}xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx=-\frac{1}{2}$. את החלק השני אפשר להוכיח בעזרת אי־שוויון הלדר. נשים לב כי $\int_{a}^{b}\left(f'\right)^{2}dm=\left\Vert f'\right\Vert _{2}^{2}$ וכן $\int_{a}^{b}x^{2}f^{2}dm=\left\Vert xf\right\Vert _{2}^{2}$, כעת מאי־שוויון הלדר

$$\frac{1}{2}=\left|\int_{a}^{b}xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx\right|\leq\int_{a}^{b}\left|xf\left(x\right)f'\left(x\right)\right|dx=\left\Vert xff'\right\Vert _{1}\leq\left\Vert f'\right\Vert _{2}\left\Vert xf\right\Vert _{2}$$

נעלה בריבוע ונקבל את הדרוש.

תרגיל: יהי $\left(X,\mathcal{S},\mu\right)$ מרחב מידה חיובית כך ש־$\mu\left(X\right)<\infty$, ויהיו $1\leq r<p<\infty$. הוכיחו כי $L^{p}\left(X\right)\subseteq L^{r}\left(X\right)$.

פתרון: תהי $f\in L^{p}\left(X\right)$. אז $\int_{X}\left|f\right|^{p}d\mu<\infty$. נסמן $s=\frac{p}{p-r}$ ו־$t=\frac{p}{r}$. נשים לב כי $\frac{1}{t}+\frac{1}{s}=1$, לכן מאי־שוויון הלדר

$$\left\Vert f\right\Vert _{r}^{r}=\int_{X}\left|f\right|^{r}1d\mu=\left\Vert \left|f\right|^{r}1\right\Vert _{1}\leq\left\Vert \left|f\right|^{r}\right\Vert _{t}\left\Vert 1\right\Vert _{s}$$

$$=\left(\int_{X}\left(\left|f\right|^{r}\right)^{t}d\mu\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{X}1^{s}d\mu\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int_{X}\left|f\right|^{p}d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\mu\left(X\right)^{\frac{1}{s}}=\left\Vert f\right\Vert _{p}^{r}\mu\left(X\right)^{\frac{1}{s}}$$

לכן $\left\Vert f\right\Vert _{r}=\left\Vert f\right\Vert _{p}\mu\left(X\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}<\infty$, כלומר $f\in L^{r}\left(X\right)$. (אכן יכולנו להשתמש באי־שוויון הלדר, שהרי $\left\Vert \left|f\right|^{r}\right\Vert _{t}=\left\Vert f\right\Vert _{p}^{r}<\infty$ לכן $\left|f\right|^{r}\in L^{t}\left(X\right)$, באופן דומה $1\in L^{s}\left(X\right)$ כי המידה סופית).

תרגיל: תהי $f\in L^{p}\left(\mathbb{R}\right)$ עבור $p>1$, וכן $f\in L^{1}\left(\mathbb{R}\right)$. הראו כי לכל A ממידת לבג סופית קיימים קבועים $c>0$ ו־$\alpha\in\left(0,1\right)$ כך ש־$\int_{A}\left|f\right|dm\leq cm\left(A\right)^{\alpha}$.

פתרון: נסמן $\left\Vert f\right\Vert _{3}=c$. יהי q כך ש־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. מאי־שוויון הלדר,

$$\int_{A}\left|f\right|dm=\left\Vert f\mathbb{1}_{A}\right\Vert _{1}\leq\left\Vert f\right\Vert _{p}\left\Vert \mathbb{1}_{A}\right\Vert _{q}=cm\left(A\right)^{\frac{1}{q}}$$

ואכן $q=\frac{p}{p-1}>1$ לכן $\frac{1}{q}\in\left(0,1\right)$. (מדוע $1\in L^{q}\left(X\right)$?)

תרגיל: יהיו $(X, \|\cdot\|_X)$, ו־$(Y, \|\cdot\|_Y)$ מרחבי בנך. נגדיר על המכפלה $X \times Y$ מבנה לינארי לפי $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. נגדיר נורמה לפי $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. הוכיחו כי $X \times Y$ הוא מרחב בנך.

הוכחה: קל לראות שזה אכן מרחב לינארי ונורמי. נראה שכל סדרת קושי מתכנסת. תהי $\{(x_n, y_n)\}$ סדרת קושי. לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n \geq N$ מתקיים $\|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\| = \|(x_m - x_n, y_m - y_n)\| = \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| < \varepsilon$. לכן הסדרות $\{x_n\}$ ו־$\{y_n\}$ הן סדרות קושי. המרחבים X ו־Y הם מרחבי בנך, לכן הסדרות האלו מתכנסות. נסמן את הגבולות שלהן ב־x ו־y בהתאמה. אם כן, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_X כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכל $\varepsilon > 0$ קיים N_Y כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. ניקח $N = \max\{N_X, N_Y\}$. כעת לכל $n \geq N$ מתקיים

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ומצאנו כי $(x_n, y_n) \to (x, y)$. לכן $X \times Y$ שלם.