מציאת מסלולים קלים בגרף

הגדרה

יהי גרף $G = (V, E)$(מכוון/לא מכוון). המשקל של מסלול $p = \langle u_1, ...u_k \rangle$(מסלול מ$u_1$ לu_k) הינו $\sum\limits_{1 \le i < k} w(u_i, u_{i+1})$.

נאמר שp <u>מסלול קל</u> מu_1 לu_k אם $w(p)$ מינימום(מבין כל משקלות המסלולים מu_1 לu_k)

הערה ייתכן יותר ממסלול קל אחד - כמה מסלולים שונים בעלי אותו משקל(מינימלי)

קלט

גרף $G = (V, E)$ ממשקל $w : E \to \mathbb{R}^+$. קודקוד מקור $s \in V$ וקודקוד יעד $t \in V$

פלט

משקל המסלול הקל ביותר מs לt(או המסלול הקל ביותר)

השיטה

S=קבוצת הקודקודים עבורם חישבנו את משקלו של המסלול הקל מS אליהם

$$S = \{s\}, S = \{s, v_1\}, ...S = V$$

איך נמצא? בסיבוב הראשון נסתכל על השכנים, כי כל מסלול לקודקוד שאינו שכן חייב לעבור דרך השכנים.
איך נבחר את הקודקוד כל פעם? בבחירה הראשונה זה קל - בוחרים את הקודקוד הכי קרוב. אבל בבחירות הבאות אין לנו שום הבטחה שהקודקוד המיידי הכי קרוב הוא באמת הכי קרוב
בשביל זה נגדיר הגדרה נוספת:

הגדרה <u>מסלול מיוחד מs לv</u> הוא מסלול שכל קודקוד במסלול שייך לS חוץ מv

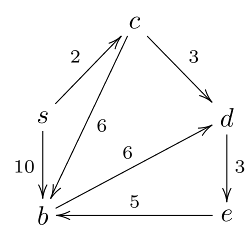
הגדרה <u>מסלול מיוחד הקל מs לv_i</u> הוא המסלול המיוחד בעל המשקל הנמוך ביותר מבין כל המסלולים המיוחדים מs לv_i

נשמור מערך D באורך $n = |V|$. לכל $v_i \in V$ נשמור ב$D(i)$

- אם $v_i \in S$: נשמור את משקלו של המסלול הקל מs v_i
- אם $v_i \notin S$, אם יש מסלול מיוחד מS לv_i נשמור את משקלו של המסלול המיוחד הקל מS לv_i.
- אחרת, נשמור ∞

בכל שלב, נוסיף לS את הקודקוד שהערך שלו בD הוא הנמוך ביותר

דוגמה



נעבור בשלבים על הגרף:

S		$D(s)$	$D(b)$	$D(c)$	$D(d)$	$D(e)$
$S=\{s\}$	s	0	10	2	∞	∞
$S=\{s,c\}$	c	0	9	2	5	∞
$S=\{s,c,d\}$	d	0	9	2	5	8
$S=\{s,c,d,e\}$	e	0	9	2	5	8
	b					

האלגוריתם של דייקסטרה(Dijkstra)

$S \leftarrow \{s\}$
$D(s) \leftarrow 0$
for all $v \in V$:

$$D(v) \leftarrow \begin{cases} w(s,v) & if\,(s,v) \in E \\ \infty & if\,(s,v) \notin E \end{cases}$$

 $p(v) \leftarrow s$

while $S \neq V$

 *let $v_0 \in V - S$ such that $D(v_0)$ minimum
 $S \leftarrow S \cup \{v_0\}$
 for $x \in V - S \cap \mathrm{Adj}(v_0)$
 **$D(x) \leftarrow \min\{D(x), D(v_0) + w(v_0,x)\}$
 if $D(x)$ changed
 $p(x) \leftarrow v_0$

זמן הריצה של דייקסטרה

שלב האתחול(5 שורות ראשונות) - $O(|V|)$.

השלב העיקרי - $O\left(|V|^2\right)$:

נסמן E_v להיות קבוצת שכני v, אזי לולאת הfor האחרונה תיקח $O(|E_v|)$, ולכן מעבר על כל הסיבובים של ה$while$ יקח $O(|E|) = O\left(\sum_{1 \le i \le n} |E_{v_i}|\right)$.

השורה המסומנת ב* תיקח $O\left(|V|^2\right)$. האם אפשר לשפר את זה?

אפשר!

נשמור את ערכי D בערימה ואז בשורה * נוכל להוציא את המינימום בזמן $O(\log|V|)$.
בשורה ** נצטרך לעדכן את ערכי הערימה בהתאם לשינוי ערכי D. זמן $O(\log|V|)$ לכל עדכון - סה"כ $O(|E|\log|V|)$

זמן הריצה:

$$O(|V|+|V|\log|V|+|E|\log|V|)=O((|V|+|E|)\log|E|)$$

משפט

האלגוריתם של דייקסטרה מחזיר לכל קודקוד v את משקלו של המסלול הקל ביותר מs לv.

הוכחה

ננסח מחדש(ונרחיב)

1. <u>בכל שלב</u>: לכל $x\in S$, $D(x)$ הוא המשקל של המסלול הקל ביותר מs לx. כל המסלול נמצא בS.
2. <u>בכל שלב</u>: לכל $x\notin S$, $D(x)$ הוא המשקל של המסלול המיוחד הקל ביותר מs לx.

נוכיח באינדוקציה על $|S|$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: $|S|=1$ $S=\{s\}$ נובע ישירות משלב האתחול

נניח נכונות הטענה ל$|S|=k$ ונוכיח ל$|S|=k+1$.
נסמן בv_0 את הקודקוד שמוסיפים לS במעבר משלב k לשלב $k+1$

נוכיח את (1):

- נתבונן ב$x\in S-\{v_0\}$. לפי הנחת האינדוקציה $D(x)$=המשקל של המסלול הקל מs לx(שימו לב: דייקרסטה לא משנה את $D(x)$) וכל המסלול מs לx נמצא ב$S-\{v_0\}$ ולכן (1) מתקיים לכל $x\in S-\{v_0\}$.
- עבור $x=v_0$
$D(v_0)$ אינו משתנה בדייקרסטה. לפי הנחת האינדוקציה $D(v_0)$=המשקל של המסלול המיוחד הקל ביותר מS לv_0(יחסית ל$S-\{v_0\}$). נרצה להוכיח שמשקלו של המסלול הקל ביותר מs לv_0=$D(v_0)$. נניח בשלילה שיש מסלול p מs לv_0 כך ש$w(p)<D(v_0)$. p אינו מסלול מיוחד(כי $D(v_0)$ משקל המסלול המיוחד הקל ביותר)

יהי x הקודקוד הראשון בp שאינו בS. נסמן בw_1 את משקלו של הרישא של המסלול של p עד x ונסמן בw_2 את משקלו של הסיפא של המסלול של p מx עד v_0. כלומר, $w(p)=w_1+w_2$.

הרישא של המסלול p עד x הינו מסלול מיוחד מs לx(ומשקלו w_1). לכן $D\left(x\right)\leq$ w_1(מהנחת האינדוקציה). מצד שני $w_2\geq 0$ כי המשקלות חיוביים. לכן

$$D\left(x\right)\leq w_1\leq w_1+w_2=w\left(p\right)<D\left(v_0\right)$$

לכן, דייקסטרה לא היה בוחר את v_0. סתירה. לכן, $D\left(v_0\right)$ משקלו של המסלול הקל ביותר מs לv_0. כיוון ש$D\left(v_0\right)$ היה משקלו של מסלול מיוחד רגע לפני שהוספנו את v_0 לS, עכשיו כל המסלול נמצא בS.

נוכיח את (2):

יהי $x\in V-S$. נרצה להוכיח ש$D\left(x\right)$ משקלו של המסלול המיוחד הקל ביותר. נסמן p את המסלול המיוחד הקל ביותר. נחלק ל3 מקרים:

1. $v_0\notin p$, p מסלול מיוחד גם ביחס ל$S-\{v_0\}$ ולכן $D\left(x\right)=w\left(p\right)$ גם לפני הוספת v_0 לS לS מהשורה

$$D\left(x\right)=\min\left\{D\left(x\right),D\left(v_0\right)+w\left(v_0,x\right)\right\}$$

דייקסטרה ישאיר את $D\left(x\right)$ כפי שהיה קודם.

2. $v_0\in p$, v_0 הקודם של x על p.
לפי (1) $D\left(v_0\right)$=משקלו של המסלול הקל ביותר מs לv_0, לכן $w\left(p\right)=D\left(v_0\right)+$ $w\left(v_0,x\right)$ ולכן דייקסטרה יעדכן כפי שצריך בשורה

$$D\left(x\right)=\leq\min\left\{D\left(x\right),D\left(v_0\right)+w\left(v_0,x\right)\right\}$$

3. $v_0\in p$ אבל v_0 אינו הקודם של x על p. נסמן בy את קודמו של x על p. לפי הנחת האינדוקציה המסלול הקל ביותר p' מs לy נמצא כולו ב$S-\{v_0\}$, ולכן p' אינו מכיל את v_0, אבל הרישא של p מs עד y עובר בv_0. סתירה. ■