מתמטיקה בדידה – תרגיל 2 – פיתרון

הערות: עקב בעייה טכנית, שלילה לוגית מסומנת ע"י ~ (טילדה). בהגשת תרגילי הבית ובמבחנים השתמשו בסימן שנראה כמו האות ר'.

שאלה 1

נגדיר את הפרידקטים הבאים:

- $N(x)$ אומר ש-x הוא שם.
- $P(x)$ אומר ש-x הוא איש.
- $R(x,y)$ – השם של x הוא y (אם x לא איש או y לא שם היחס שקרי).
- $x = y$ - יחס השוויון (אין להשתמש ביחס $\neq$)

כתבו את הטענות הבאות כפסוקים. כאשר מכמתים, הכימות הוא על כל האנשים והשמות ביחד.

1. לכל איש יש שם
2. קיים איש עם שם יחיד
3. אם קיים איש עם שם יחיד אז לא קיים איש ללא שם
4. לכל איש עם שם יש שם נוסף (שונה מהראשון)
5. לא קיים איש שהוא שם
6. קיימים שני אנשים (שונים) עם אותו שם.
7. לכל איש עם שם קיים איש אחר עם אותו שם.

פיתרון

הערה: מקיום היחס $R(x,y)$ נובע ש-x הוא איש ($P(x)$) וש-y הוא שם ($N(y)$). לכן, לפעמים ניתן לוותר על שימוש ביחסים P ו-N בתשובות.

1. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ (אין צורך לציין ש-y הוא שם כי זה נובע מהיחס R.)
2. $\exists x \exists y \Big(R(x,y) \wedge \forall z\big(R(x,z) \to (z=y)\big)\Big)$
3. $\exists x \exists y \Big(R(x,y) \wedge \forall z\big(R(x,z) \to (z=y)\big)\Big) \to \sim\exists x\big(P(x) \wedge \forall y \sim R(x,y)\big)$
4. $\forall x\Big(\big(\exists y R(x,y)\big) \to \exists y \exists z\big(R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge \sim(y=z)\big)\Big)$
5. $\sim\exists x\big(P(x) \wedge N(x)\big)$
6. $\exists x \exists y \exists z\big(R(x,z) \wedge R(y,z) \wedge \sim(x=y)\big)$
7. $\forall x\Big(\big(\exists n R(x,n)\big) \to \exists y \exists n\big(R(x,n) \wedge R(y,n) \wedge \sim(x=y)\big)\Big)$

שאלה 2

בסימונים של שאלה 1, ענו על השאלות הבאות:

א. האם טענות 2 ו-3 (משאלה 1) גוררות את טענה 1? אם לא, הדגימו זאת.
ב. האם טענה 7 גוררת את טענה 6? אם לא, הדגימו זאת.
ג. נניח שטענה 2 שקרית. האם טענה 4 בהכרח נכונה? אם לא, הדגימו זאת.
ד. נניח שטענה 3 שקרית. מה ניתן לומר על טענה 4? אם לא ניתן לדעת כלום, הדגימו זאת.

הערה: אין צורך לתת הוכחות לוגיות פורמליות. במקום זאת נמקו את קביעתכם במילים. כאשר אתם רוצים להדגים, הגדירו אילו אנשים ושמות קיימים בעולם, ואז הגדירו את הפרדיקטים N, R, P (אין צורך להגדיר שוויון ☺).

פיתרון

א: טענות 2 ו-3 אכן גוררות את טענה 1. נסביר מדוע: טענה שלוש בעצם אומרת "אם {טענה 2} אז לא קיים איש ללא שם". לכן, אם טענה 2 נכונה אז "לא קיים איש ללא שם". לפי חוקי דה מורגן, הטענה הזו שקולה ל"לכל איש יש שם" וזו בדיוק טענה 1.

אותו פיתרון בנוסח אחר: נגדיר פרדיקט חדש $A(x) = \exists y R(x,y)$ שאומר ש-x הוא איש עם שם. נניח כי טענות 2 ו-3 נכונות. אזי טענה 3 אומרת "אם {טענה 2} אז $\sim\exists x\sim A(x)$". לכן הטענה $\sim\exists x\sim A(x)$ נכונה. לפי חוקי דה מורגן, היא שקולה ל-$\forall x A(x)$ ולכן גם $\forall x A(x)$ נכון. אבל $\forall x A(x)$ זו בעצם טענה 1 ולכן גמרנו.

ב: טענה 7 אינה בהכרח גוררת את טענה 6. זה יכול לקרות רק אם לכל האנשים בעולם שלנו אין שם. נדגים זאת: נניח שיש רק איש אחד, שיסומן ב-X ורק שם אחד שיסומן ב-Y. נגדיר את הפרדיקטים N, P, R באופן הבא:

- $N(X) = 0, N(Y) = 1$ (X אינו שם, Y הוא כן שם)
- $P(X) = 1, P(Y) = 0$ (X הוא איש, Y אינו איש)
- $R(x,y) = 0$ לכל x, y אפשריים. כלומר, לאף איש אין שם.

טענה 7 אומרת "לכל איש x: {ל-x יש שם} גורר {...}", אבל בעולם שלנו הטענה " ל-x יש שם" תמיד שקרית ולכן הגרירה "{ל-x יש שם} גורר {...}" תמיד אמתית – לכל x אפשרי. לכן, טענה 7 נכונה.

מצד שני, טענה 6 אומרת כי קיימים שני אנשים שונים עם אותו שם. אבל בעולם שלנו לא יכולים להיות שני אנשים שונים (כי יש רק איש אחד, X). לכן, טענה 6 שקרית.

ג: אם טענה 2 שקרית אז טענה 4 אמיתית. נראה כי טענה 4 נובעת משקריות טענה 2 בדרך השלילה: נניח כי טענה 2 שקרית וגם טענה 4 שגויה ונקבל סתירה. באמת, טענה 4 אומרת "לכל איש x עם שם y: קיים ל-x שם מלבד y". לכן, אם טענה 4 שקרית, אז קיים איש x_0 עם שם y_0 כך שלא קיים ל-x שם מלבד y. אבל זה אומר ש-x_0 הוא איש עם שם יחיד. כלומר, קיבלנו שטענה 2 נכונה – בסתירה להנחת המוצא שלנו שטענה 2 שקרית. לכן, אם טענה 2 שקרית, טענה 4 בהכרח אמיתית.

ד: אם טענה 3 שקרית אז טענה 4 גם שקרית. הסבר: טענה 3 אומרת "אם {קיים איש עם שם יחיד} אז {לא קיים איש ללא שם}". טענה כזו היא שקרית רק כאשר הטענה "קיים איש עם שם יחיד" נכונה והטענה "לא קיים איש ללא שם" שגויה. לכן, מהשיקריות של 3 נובע שקיים איש x_0 עם שם יחיד y_0 – כלומר ל-x_0 לא קיים שם z שונה מ-y_0. אבל זה אומר שטענה 3 שקרית.

שאלה 3

הראו כי הפסוקים הבאים נכונים: (אין צורך להציג הוכחה לוגית פורמלית. הוכיחו במילים, או בעזרת הכללים שראיתם בשיעור).

1. $[(\exists x P(x)) \wedge (\forall x(P(x) \to Q(x))] \to (\exists x Q(x))$
2. $[\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(x,z) \to y = z) \wedge P(c,c)] \to \forall x(P(c,x) \to (x = c))$
3. $(\forall x P(x)) \vee (\exists x\sim P(x))$ (הסימן ~ אומר שלילה)
4. $\forall x \forall y(P(x,y) \vee P(y,x)) \;\to\; \forall x P(x,x)$

והראו ע"י בחירת פרידקטים כי הפסוק הבא אינו בהכרח נכון:

5. $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x P(x,y) \quad \rightarrow \quad \exists x \exists y \forall z \big(P(z,y) \vee P(x,z)\big)$

פתרון

הוכחה 1: צריך להראות שאם מתקיים $\big(\exists x P(x)\big) \wedge \forall x \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ אז מתקיים גם $\exists x Q(x)$.

1. אם מתקיים $\big(\exists x P(x)\big) \wedge \forall x \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ אז בפרט מתקיים $\exists x P(x)$, כלומר קיים x_0 כך ש-$P(x_0)$ נכון.
2. היות וגם מתקיים $\forall x \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ אז ניתן להציב x_0 במקום x ולקבל שהפסוק $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ נכון.
3. אם $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ וגם $P(x_0)$ נכונים אז גם $Q(x_0)$ נכון. [זה אחד מהכללים שראינו בכיתה: $\big(A \wedge (A \rightarrow B)\big) \rightarrow B$.]
4. לכן, קיים x כך ש-$Q(x)$ (זה נכון אם בוחרים $x = x_0$ לפי 3). כלומר, $\exists x Q(x)$ נכון.

הוכחה 2: צריך להראות שאם מתקיים $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y = z) \wedge P(c,c)$ אז מתקיים $\forall x \big(P(c,x) \rightarrow (x = c)\big)$.

הערה: c הוא קבוע (להבדיל ממשתנה).

1. מ-$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y = z) \wedge P(c,c)$ נובע ש-$P(c,c)$ וגם - $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y = z)$.
2. נציב $x = c, z = c$ בפסוק $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y = z)$ ונקבל כי מתקיים $\forall y (P(c,y) \wedge P(c,c) \rightarrow y = c)$.
3. הפסוק $P(c,c)$ נכון ולכן ניתן $P(c,y) \wedge P(c,c)$ שקול ל-$P(c,y)$. אם נציב זאת במסקנה של 2 נקבל $\forall z (P(c,y) \rightarrow y = c)$, וזה בדיוק מה שרצינו להראות. (עד כדי החלפת שם המשתנה y ל-x.)

הוכחה 3: צריך להראות $\big(\forall x P(x)\big) \vee \big(\exists x {\sim} P(x)\big)$. באמת:

בשקילות השמאלית השתמשנו בחוקי דה מורגן. השקילות הימנית נובעת מכך הביטוי באגף שמאל הוא הצבה של $\forall x P(x)$ בטאוטולוגיה $A \vee {\sim} A$ והצבה של פסוק בטאוטולוגיה מניבה טאוטולוגיה חדשה.

הוכחה 4: צריך להראות שאם מתקיים $\forall x \forall y \big(P(x,y) \vee P(y,x)\big)$ אז מתקיים $\forall x P(x,x)$.

1. נתון כי הטענה $P(x,y) \vee P(y,x)$ נכונה עבור כל x, y. בפרט, היא נשארת נכונה אם נבחר את y להיות שווה ל-x. כלומר, הטענה $P(x,x) \vee P(x,x)$ נכונה לכל x.
2. $P(x,x) \vee P(x,x) \equiv P(x,x)$ (כי $A \vee A \equiv A$). לכן מ-1 נובע $\forall x P(x,x)$.

נראה כי 5 אינו בהכרח נכון: נבחר את העולם שלנו להיות המספרים השלמים ואת הפרדיקט $P(x,y)$ להיות $x = y$. אזי:

1. לכל x מתקיים $P(x,x)$ ולכן $\forall x \exists y P(x,y)$.
2. לכל y מתקיים $P(y,y)$ ולכן $\forall y \exists x P(x,y)$.
3. משלבים 1 ו-2 נובע ש-$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x P(x,y)$.

4. מצד שני, לכל x,y הפסוק $P(x,z) \vee P(z,y)$ שקרי עבור $z = \max\{x,y\} + 1$. לכן, <u>לכל</u> x,y <u>קיים</u> z <u>כך ש</u>-$\sim\left(P(x,z) \vee P(z,y)\right)$.
5. המסקנה של שלב 4 שקולה לטענה $\sim\exists x\exists y\forall z\left(P(x,z) \vee P(z,y)\right)$ לפי חוקי דה מורגן. לכן הטענה $\sim\exists x\exists y\forall z\left(P(x,z) \vee P(z,y)\right)$ נכונה.
6. משלבים 3 ו-5 נובע שהטענה $\forall x\exists yP(x,y) \wedge \forall y\exists xP(x,y) \ \rightarrow \ \exists x\exists y\forall z\left(P(z,y) \vee P(x,z)\right)$ שקרית. כדרוש.