מבחן לדוגמא - בדידה מדעי המחשב (89198)

.

מרצה: אחיה בר-און
מתרגל: אריאל ויצמן
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.
- ניקוד מקסמאלי הוא 120. הניקוד מצוין ליד כל שאלה. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- בשאלות על עוצמות התשובות צריכות להיות מספר סופי או מתוך האפשרויות $\{\aleph_0, א, 2^{\aleph_0}, 2^{א}\}$.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. [7 נק' לסעיף] הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל p,q,r פסוקים לוגים מתקיים (הסימון $\equiv$ בשאלה זאת מציין שקילות לוגית) $[(p \wedge q) \uparrow r] \equiv [(p \uparrow r) \wedge (q \uparrow r)]$.

(ב) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים כי $A \cap B = A \iff A \in P(B)$.

(ג) הקבוצה $A = \{6^n : n \in \mathbb{N}\}$ שווה לקבוצה $B = [\{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n : n \in \mathbb{N}\}]$

2. תהא $A = \{1,\dots,n\}$ ותהא $B = \{n+1,\dots,2n\}$.

(א) [7 נק'] כמה תתי קבוצות מגודל n יש ל $A \cup B$?

פתרון: זה לספור כמה תתי קבוצות מגודל n יש לקבוצה בת $2n$ איברים שזה $\binom{2n}{n}$.

(ב) [7 נק'] יהא $0 \le k \le n$. כמה תתי קבוצות מגודל n יש ל $A \cup B$ ש k איברים מתוכם בדיוק מקבוצה A?

פתרון: זה לספור כמה תתי קבוצות מגודל k יש לקבוצה בת n (הקבוצה A) כפול כמה תתי קבוצות מגודל $n-k$ (יך להשלים $n-k$ איברים לקבלת קבוצה בגודל n) יש לקבוצה בת n איברים (הקבוצה B) שזה

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$$

.

(ג) [5 נק'] צטטו את עקרון ההכלה הדחה.

פתרון: עבור $A_1,\dots,A_n$ קבוצות סופיות מתקיים כי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

(ד) [8 נק'] נניח כי n זוגי. כמה תתי קבוצות X של $A \cup B$ מגודל n יש כך ש X לא מכילה את $\{i, n+i\}$ לכל $1 \le i \le n$?

פתרון: בעזרת הכלה הדחה נגדיר לכל $1 \le i \le n$ נגדיר את הקבוצה $A_i = \{X \subseteq A \cup B : \{i,n+i\} \subseteq X\}$ ואז נרצה לחשב:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \binom{2n}{n} - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

ואת האיחוד נחשב

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-2k}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך כי $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ שווה לכל Iים מאותו גודל. ועבור $|I|=k$ נקבל כי $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \binom{2n-2k}{n-2k}$ כיוון ש $2k$ איברים חייבים להיות בקבוצה (האיברים $\{i, n+i | i\in I\}$) ואז צריך לבחור עוד $n-2k$ איברים מתוך ה $2n-2k$ שנשארו.

3. תהא X קבוצה. נגדיר יחס $\sim$ על $P(X)$ כך: לכל $A, B\in P(X)$

$$A\sim B \iff |A| = |B|$$

(א) [6 נק'] הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.

(ב) [9 נק'] עבור $X=\mathbb{N}$ מצאו את עוצמת ${}^{P(\mathbb{N})}/_{\sim}$.

פתרון: כל $X\subseteq\mathbb{N}$ מקיימת כי $|X|\leq\aleph_0$ כלומר בת מניה. או באופן שקול או ש X סופית או ש $|X|=\aleph_0$. לכל n טבעי הקבוצה $A=\{1,\dots,n\}$ מגודל n והקבוצה הריקה מגודל 0. בנוסף יש את $\mathbb{N}$שהיא מעוצמה $\aleph_0$ ואלו כל האפשרויות לעוצמות לתתי קבוצות של הטבעיים ולכן

$${}^{P(\mathbb{N})}/_{\sim} = \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\aleph_0\}$$

שזוהי קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

4. [8 נק'] נגדריר O קבוצת כל יחסי השקילות על $\{1,\dots,n\}$ נגדיר $A=\{R\in O : |{}^{\{1,\dots,n\}}/_{R}| = 2\}$ הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|A| = 2^{n-1}-1$.

פתרון: כיוון שיש התאמה חח"ע ועל בין O לקבוצת החלוקות של $\{1,\dots,n\}$ עם 2 קבוצות $P = \{\{S_1,S_2\} : S_1\cap S_2=\emptyset,\ S_1,S_2\neq\emptyset,\ S_1\cup S_2=\{1,\dots,n\}\}$ נוכיח כי $|P|=2^{n-1}-1$ באינדוקציה על n:

בסיס: עבור $n=1$ נקבל את הקבוצה $\{1\}$ שאין לה חלוקה עם 2 קבוצות ולכן $|P| = 0 = 2^{1-1}-1$.

צעד: נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$.
נסמן $P' = \{\{S_1,S_2\} : S_1\cap S_2=\emptyset,\ S_1,S_2\neq\emptyset,\ S_1\cup S_2=\{1,\dots,n\}\}$. ו $P = \{\{S_1,S_2\} : S_1\cap S_2=\emptyset,\ S_1,S_2\neq\emptyset,\ S_1\cup S_2=\{1,\dots,n,n+1\}\}$

בקבוצה P יש חלוקה אחת בה $n+1$ נמצא בקבוצה משל עצמה. מפורשות - החלוקה $X=\{\{1,\dots,n\},\{n+1\}\}$. נוכיח באופן שקול כי $|P\backslash\{X\}| = 2^n-2$. אכן לכל חלוקה $\{S_1,S_2\}\in P'$ של $\{1,\dots,n\}$ נקבל חלוקה של $\{1,\dots,n+1\}$ אם נוסיף את $n+1$ לקבוצה S_1 או לקבוצה S_2. בצורה כזאת נקבל כל חלוקה ב $P\backslash\{X\}$ ולכן $|P\backslash\{X\}| = 2|P'|$ לפי הנחת האינדוקציה נוכל להמשיך $= 2|P'| = 2\left(2^{n-1}-1\right)$ 2^n-2 כנדרש.

5. תהא A קבוצה ותהא $f:A\to\mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר

$$R_f = \{(a,a')\in A\times A : f(a)|f(a')\}$$

כאשר $f(a)|f(a')$ פירושו $f(a)$ מחלק את $f(a')$.

(א) [7 נק'] הוכיחו כי R_f יחס סדר על A $\iff$ f חח"ע.
פתרון:

($\Leftarrow$) נתון R_f יחס סדר. צ"ל f חח"ע. נניח בשלילה כי קיימים $a \neq a'$ ב A כך ש $f(a) = f(a')$ אזי $(a, a'), (a', a) \in R_f$ בסתירה לכך ש R_f אנטי סימטרי.

($\Rightarrow$) נתון f חח"ע. צ"ל R_f יחס סדר. רפלקסיבי: לכל $a \in A$ מתקיים $f(a)|f(a)$ ולכן $(a, a) \in R_f$. אנטי סימטרי סימטרי: נניח $(a, a'), (a', a) \in R_f$ אזי $f(a)|f(a') \wedge f(a')|f(a)$ ובקבוצת הטבעיים זה גורר כי $f(a) = f(a')$ וכיוון ש f חח"ע נקבל $a = a'$. טרנזיטיביות: נניח $(a_1, a_2), (a_2, a_3) \in R_f$. מכאן ש $f(a_1)|f(a_2) \wedge f(a_2)|f(a_3)$ ולכן $f(a_1)|f(a_3)$ ולכן $(a_1, a_3) \in R_f$ כנדרש.

(ב) [7נק'] עבור $A = \mathbb{N}$, מצאו f כך ש R_f יחס סדר קווי על A.
פתרון:

למשל $f(n) = 2^n$. ואז לכל $a, a' \in R_f$ מתקיים כי: אם $a \leq a'$ $(a, a') \in R_f$ כי $f(a) = 2^a | 2^{a'} = f(a')$ ואחרת $a' < a$ ואז $(a', a) \in R_f$.

(ג) [8 נק'] עבור $A = \mathbb{Z}$ נגדיר O להיות קבוצת כל הפונקציות $f : A \to \mathbb{N}$ כך ש R_f סדר קווי. מצאו את עוצמת O.
פתרון:

נגדיר $B = \left\{2^i : i \in \mathbb{N}\right\}$ ונגדיר $O' = \{f \in O : Imf \subseteq B\}$ כיוון שהיחס "מחלק את" על B הוא קווי נקבל כי $O' \subseteq O$. נראה כי $|O'| = 2^{\aleph_0}$ ונסיים (כי $O' \subseteq O \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ ולכן $|O'| \leq |O| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$). נגדיר $B' = \{X \subseteq B : |X| = \aleph_0\}$ כלומר B' היא אוסף כל תתי הקבוצות האינסופיות של B. תהא $X \in B'$ אזי עוצמתה $\aleph_0$ ונוכל לסמנה $X = \left\{2^i : i \in I\right\}$ עבור קבוצת אינדקסים I מעוצמה $\aleph_0$כלומר קיימת פונקציה חח"ע ועל $g : \mathbb{Z} \to I$. נגדיר $f : \mathbb{Z} \to X$ ע"י $f(m) = 2^{g(m)}$ ומתקיים כי $f \in O'$ ו $Im(f) = X$. לכן הפונקציה מ $O' \to B'$ המוגדרת $f \mapsto Im(f)$ היא על ובפרט $|B'| \leq |O'|$. נסיים בכך ש $|B'| = 2^{\aleph_0}$ הוכחה: קבוצת תתי הקבוצות האינסופיות של הטבעיים היא מעוצמה $2^{\aleph_0}$ ועבור תת קבוצה Y אינסופית של הטבעיים נתאים $X = \{2^y : y \in Y\} \in B'$. התאמה זאת היא פונקציה חח"ע ועל (הפונקציה ההופכית היא $X \mapsto Y = \{\log_2(x) : x \in X\}$) ולכן הם שוות עוצמה.

.6

(א) [7 נק'] יהא $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון ויהיו $v, u \in V$ הוכיחו כי קיים מסלול מ v ל u $\iff$ קיים מסלול פשוט מ v ל u.
פתרון:

הכיוון ($\Rightarrow$) ברור. בכיוון ($\Leftarrow$) נתון שקיים מסלול מ v ל u. נגדיר $P = (v_0, \ldots, v_t)$ מסלול בין v ל u עם אורך הקצר ביותר. טענה P מסלול פשוט. הוכחה: נניח בשלילה כי P מסלול שאינו פשוט אזי קיימים $v_i = v_j$ כך ש $i < j$ ו $\{i, j\} \neq \{0, t\}$ נגדיר $P' = (v_0, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_t)$ אזי P' מסלול בין v ל u ואורכו קצר מ P. סתירה.

(ב) יהא $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון. נגדיר את גרף הקו של G שמסומן $L(G)$ כך: $L(G) = (V', E')$ כאשר $V' = E$ ו

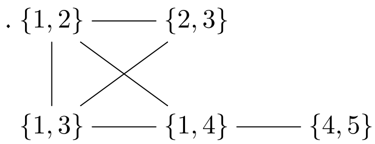
$$E' = \{\{e, e'\} \mid (e \neq e' \in E) \wedge (e \cap e' \neq \emptyset)\}$$

כלומר קבוצת הקודקודים של $L(G)$ היא קבוצת הקשתות של G ויש קשת בין שני קשתות אם יש להם קודקוד משותף.

i. [5 נק'] עבור $V = \{1,2,3,4,5\}, E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\},\{1,3\},\{4,5\}\}$ והגרף $G = (V,E)$ ציירו את הגרף $L(G)$.

פתרון:

למשל



ii. [4 נק'] תנו דוגמא ל G לא קשיר ו $L(G)$ כן קשיר.

פתרון: אם G הוא

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \qquad 4$$

שאינו קשיר. אזי $L(G)$ הוא הגרף הקשיר

$$\{1,2\} \text{ —— } \{2,3\}$$

.

iii. [9 נק'] נניח כי G אינו קשיר וקיימים שני רכיבי קשירות שעוצמתם גדולה שווה ל 2. הוכיחו כי $L(G)$ אינו קשיר.

פתרון: יהיו $[v],[v']$ שני רכיבי קשירות שונים שיש בכל אחד לפחות שני קודקודים. אזי קיימות שני קשתות שונות e,e' כך ש e מחברת שני קודקודים ב $[v]$ ו e' מחברת שני קודקודים ב $[v']$. טענה: אין מסלול בין e ל e' ב $L(G)$. הוכחה: נניח בשלילה כי קיים מסלול ב $L(G)$ מ e ל e' שנסמנו $P = (e_0,\ldots,e_t)$ ובה"כ הוא פשוט לפי סעיף א. לפי הגדרת $L(G)$ לכל $0 \le i \le t-1$ קיים $v_i \in e_i \cap e_{i+1}$ ולכן אם $v_{i-1} \neq v_i$ נקבל כי $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ולכן בין כל שני קודקודים שונים עוקבים בסדרה יש קשת. כעת נסתכל בסדרת הקודקודים $(v_0,\ldots,v_{t-1})$ ובשביל להפוך אותה למסלול נעשה את התיקון הבא: לכל $0 \le i \le t-1$ אם $v_i = v_{i+1}$ נמחק את v_i מהסדרה ונקבל סדרה $\hat{P} = (u_0,\ldots u_m)$ כך ש $u_i \neq u_{i+1}$ לכל $0 \le i \le m-1$. לסיום נשים לב כי $u_0 = v_0 \in [v]$ ו $u_m = v_{t-1} \in [v']$ ולכן $\hat{P}$ הוא מסלול משני רכיבות קשירות שונים. סתירה.

בהצלחה! ☺